

**REGULARISIERUNG SINGULÄRER
NICHT ELLIPTISCHER INTEGRAL-
GLEICHUNGEN MIT UNSTETIGEN
KOEFFIZIENTEN**

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
BALDUR M. SCHÜPPEL
aus Einsiedel bei Chemnitz
München, Dezember 1973

1974
—

**REGULARISIERUNG SINGULÄRER
NICHT ELLIPTISCHER INTEGRAL-
GLEICHUNGEN MIT UNSTETIGEN
KOEFFIZIENTEN**

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
BALDUR M. SCHÜPPEL
aus Einsiedel bei Chemnitz
München, Dezember 1973



1. Berichterstatter: Prof. Dr. Ernst Wienholtz

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Günther Hämmerlin

Tag der mündlichen Prüfung: 4. 7. 1974

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

Abschnitt		Seite
1	Definition und einige Eigenschaften der Räume $W_{p,n}^m(\Gamma, \varrho)$	5
2	Die Einbettung des Raumes $W_p^m(\Gamma, \varrho)$ in den Raum $C^{m-1}(\Gamma)$	9
3	Die Konstruktion der Mittelungsfunktionen	11
4	Die Hermiteschen Interpolationspolynome	36
5	Die Stetigkeit des Operators $S\eta: W_{p,n}^m(\Gamma, \varrho) \rightarrow W_{p,n}^m(\Gamma, \varrho^{1-\lambda})$	60
6	Die Vollstetigkeit des Operators $SAI-AS: L_{p,n}(\Gamma, \varrho) \rightarrow W_{p,n}^m(\Gamma, \varrho)$	66
7	Die linke und die rechte Regularisierung singulärer nicht elliptischer Integral- gleichungen	96
8	Anhang	106
	Literaturverzeichnis	114
	Zusammenfassung	120
	Lebenslauf	121



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551921_0068

O. Einleitung:

Die vorliegende Arbeit ¹⁾ befasst sich mit der Regularisierung von eindimensionalen, nicht elliptischen, singulären Integralgleichungen auf nicht geschlossenen Kurven, d.h. mit Integralgleichungen der Form

$$(\mathfrak{A}\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau + (\mathfrak{X}\varphi)(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

(f , a und b gegebene Funktionen auf Γ , φ gesuchte Funktion auf Γ), in denen die Funktionen $c:=a+b$ und $d:=a-b$ bis auf endlich viele Unstetigkeiten 1.Art hinreichend glatt sind und im Inneren $\overset{\circ}{\Gamma}$ der Integrationskurve Γ endlich viele Nullstellen ganzzahliger (endlicher) Ordnungen besitzen. Dabei sei $\mathfrak{X}$ ein (in einem entsprechenden Funktionenraum) vollstetiger Operator und das in (1) auftretende singuläre Integral soll im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes verstanden werden. Im Gegensatz zur Fredholm-Rieszschen Funktionalgleichung zweiter Art, in die (1) im Spezialfalle: $b=0$, $a(t) \neq 0$ ($t \in \Gamma$) übergeht, tritt hierbei der in entsprechenden Funktionenräumen zwar stetige, aber dort nicht vollstetige singuläre Integraloperator mit dem Kern

$$\frac{1}{\pi i} \cdot \frac{1}{\tau-t}$$

auf. Die Methode der Regularisierung besteht nun gerade darin, durch Anwendung eines geeignet gewählten Operators (dieser wird dann Regularisator genannt) auf beiden Seiten der Gleichung (1), also auf $\mathfrak{A}$ und auf f , die Gleichung (1) in eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art zu überführen.

Auf singuläre Integralgleichungen der Form (1) lassen sich viele Randwertaufgaben (vgl. z.B. [40], [87] und [88]) der mathematischen Physik, z.B. der Elastizitätstheorie (insbesondere der Schalentheorie), der Optik (Beugung elektromagnetischer Wellen am Spalt [85]), in der Strömungslehre (insbesondere Tragflügeltheorie, Brown'sche Bewegung mit Reflexion [86]), im Talsperrenbau [78], in der Werkstoffkunde (Metallhärten) und auf vielen anderen Gebieten überführen.

¹⁾ Der Autor dankt den Herren Prof.Dr.Meister, Prof.Dr.Wienholtz und Prof.Dr.Jörgens für das Interesse, das sie dieser Arbeit entgegenbrachten. Ebenso ist er Herrn Prof.Dr.Prössdorf für die Aufgabenstellung zu Dank verpflichtet.

In der Arbeit [23] betrachtet Noether den Fall einer Gleichung auf geschlossenem Integrationsweg Γ unter der Bedingung, dass

$$a^2(t) - b^2(t) \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \Gamma \text{ gilt.} \quad (2)$$

Singuläre Integralgleichungen, für die diese Bedingung (2) erfüllt ist, heissen elliptisch, andernfalls nicht elliptisch. Fritz Noether stellte für eine elliptische singuläre Integralgleichung auf geschlossener Integrationskurve eine allgemeine Theorie auf. Der Unterschied zwischen der Noetherschen Theorie und der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art besteht im wesentlichen darin, dass die Differenz (sogenannter Index der Gleichungen) zwischen der Maximalzahl der linear unabhängigen Lösungen der zwei adjungierten homogenen Gleichungen im allgemeinen für singuläre Integralgleichungen von null verschieden ist, während diese Differenz bekanntlich für Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art stets gleich null ist.

Als Lösungsmethode für eine elliptische Gleichung auf nicht geschlossenem Integrationsweg Γ schlägt Carleman in [24] vor, die singuläre Integralgleichung in ein Riemannsches Randwertproblem zu überführen. Vom Standpunkt der Funktionalanalysis aus gesehen, ist der Beitrag [47] von M. Riesz wesentlich. Insbesondere beweist er dort die Stetigkeit des singulären Integraloperators mit Hilbertschem Kern in den Räumen L_p , $p > 1$. S.G. Michlin [48] erkannte als erster die Vollstetigkeit des Kommutators $[SaI - aS]$ im Raume L_2 für stetiges a .

In [50] und in [51] werden im Zusammenhang mit dem zugehörigen Riemannsches Randwertproblem das erste Mal auch nicht elliptische Integralgleichungen mit unstetigen (von 1. Art) Koeffizienten betrachtet. Im Jahre 1952 beschäftigte sich Čikin in seinem ausführlichen Artikel [10] wieder mit dieser Frage. Unabhängig von Gachov und Čikin gab Šerman in [53] eine Lösung (Γ geschlossen) für Spezialfälle an, in denen entweder $a(t)+b(t) \neq 0$ für alle $t \in \Gamma$ oder $a(t)-b(t) \neq 0$ für alle $t \in \Gamma$ anstelle von (2) gefordert wird. Besonders hervorzuheben ist noch das bemerkenswerte, negative Ergebnis von I.C. Gochberg in [36]. Dort weist er nach, dass die Bedingung (2)

²⁾ X, Y seien Banachräume. Ein abgeschlossener Operator $B: X \rightarrow Y$ heisst Fredholmoperator, wenn $B(X)$ abgeschlossen, $\dim \text{Ker } B < \infty$ und $\dim \text{Coker } B < \infty$ ist.

dafür notwendig ist, dass für geschlossene Integrationskurve Γ der Operator $\mathfrak{U}: L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma)$, $D(\mathfrak{U}) = L_p(\Gamma)$, $p > 1$, ein Fredholmoperator ist ³⁾. Die charakteristische singuläre Integralgleichung (d.h. die Gleichung (1) für $\mathfrak{x}=0$) wurde von Vekua [58] und Chvedelidse [7] für den Fall, wo die Funktion a^2-b^2 auf Γ Nullstellen von kleinerer als erster Ordnung hat, gelöst (vergl.a. [51]). 1962 setzte Kosulin in [11] die Untersuchungen [53] Šerman's fort und gewann neue Ergebnisse für solche Gleichungen, für die $a+b$ oder $a-b$ Nullstellen nicht ganzzahliger Ordnung hat, dazu. Damit verallgemeinerte er die Šerman'schen Ergebnisse, die dieser unter Voraussetzung von Nullstellen ganzzahliger Ordnungen auf geschlossener Kurve Γ erhielt. Für nicht geschlossene Integrationskurve Γ erkannte Kosulin in [16] und in [59] dass der durch (1) gegebene Operator $\mathfrak{U}$ (bei hinreichender Glattheit von a und b) im Raume der Distributionen $C^\infty(\Gamma)$ normalauflösbar ist, falls entweder $a+b$ oder $a-b$ auf Γ nur endlich viele Nullstellen besitzt. I.M.Melnik [56-57] untersucht das Riemannsche Randwertproblem in dem Fall, wo die Funktion G ⁴⁾ in einem Endpunkt c eine Nullstelle besitzt, und stellte fest, dass dann die Lösung des Riemannschen Randwertproblems, wenn man sich dem Endpunkt c auf verschiedenen Strahlen nähert, von verschiedener Ordnung unendlich gross wird. Beginnend mit den Arbeiten [3] und [5] wurden von S.Prössdorf Gleichungen, für die a^2-b^2 auf Γ endlich viele Nullstellen ganzzahliger Ordnungen (Γ geschlossen) hat, systematisch erforscht. In [1] stellt er für diese Gleichungen in verschiedenen Räumen eine Theorie auf. Kürzlich wurde von B.Silbermann [70-72] der Fall, wo a^2-b^2 endlich viele Nullstellen gebrochener Ordnungen hat, eingehend funktionalanalytisch untersucht.

In der vorliegenden Arbeit wird nun sowohl ein beschränkter linker als auch ein beschränkter rechter Regularisator des Operators $\mathfrak{U}$ angegeben. Dabei bezeichnet $\bar{\mathfrak{U}}$ die Einschränkung von $\mathfrak{U}$ auf einen gewissen in $D(\mathfrak{U})$ dicht liegenden Teilraum. Aus dem Satz von S.G.Michlin [20] folgt dann sofort, dass $\bar{\mathfrak{U}}$ ein Fredholmoperator ist. Unter einem linken (rechten) Regularisator B von $A: X \rightarrow Y$, X, Y seien z.B. Banachräume, versteht man einen linearen Operator, für den die Beziehungen:

$$D(B) \supset R(A) \quad \text{und} \quad BA = I + V_1$$

$$(\quad R(B) \subset D(A) \quad \text{und} \quad AB = I + V_2 \quad)$$

gelten, wobei V_1 (V_2) einen beliebigen vollstetigen und I die identische Abbildung im Raume X (Y) bezeichnen.

³⁾siehe Fussnote auf Seite 2

⁴⁾siehe 7.Abschnitt, dort ist G definiert.

Im Abschnitt 1 werden die Räume $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$, $p > 1$, eingeführt. Fragen der Einbettbarkeit von $L_p(\Gamma, \rho)$ in $L_r(\Gamma)$, $r > 1$, (und umgekehrt) werden im 2. Abschnitt betrachtet. Im 3. Abschnitt werden die Mittelungsfunktionen im Raume $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$ untersucht. Die dort erhaltenen Abschätzungen werden in den späteren Abschnitten benötigt. Im 4. Abschnitt wird die Stetigkeit der Operatoren

$$P_m : W_p^n(\Gamma, \rho) \rightarrow W_p^{n-m}(\Gamma, \rho) \quad \text{von der Form} \quad P_m = \frac{I - \bar{H}}{(x - x_0)^m}, \quad n \geq m \text{ ganz,}$$

bewiesen. Dabei bezeichne H den (endlichdimensionalen) Operator, der jedem $f \in C^{m-1}(\Gamma)$, $m > 0$, das (eindeutig bestimmte) Hermitesche Interpolationspolynom Hf vom Grade $(m-1)$ mit dem Interpolationsknoten x_0 zuordnet ($x, x_0 \in \Gamma$). $\bar{H}$ bezeichne die Einschränkung von H von $C^{m-1}(\Gamma)$ auf den Raum $W_p^n(\Gamma, \rho)$ und I die Identität in letzterem. Im 5. Abschnitt wird die Stetigkeit von $SP : W_p^n(\Gamma, \rho) \rightarrow W_p^n(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ gezeigt. Ausserdem wird dort bewiesen, dass $C^\infty[a, b]$ dicht im Raume $C^{m, \mu}[a, b]$ liegt für $\mu \in (0, 1)$ und ganzzahligem m . Die Vollstetigkeit des Kommutators $[SaI - aS]$ wird im 6. Abschnitt untersucht. Die dort erzielten Ergebnisse dürften auch selbständige Bedeutung beanspruchen. Schliesslich werden im 7. Abschnitt die beiden Regularisatoren angegeben, womit nachgewiesen ist, dass der eingeschränkte Operator $\bar{\mathcal{O}}$ noethersch oder wie man heute allgemein sagt - (verallgemeinert) fredholmsch ist. Im skalaren Falle der Gleichung (1) wird dann über das Riemannsche Randwertproblem auch der Index des Operators $\bar{\mathcal{O}}$ ($\neq 0$) berechnet.

1. Abschnitt

DEFINITION UND EINIGE EIGENSCHAFTEN DER RÄUME $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$:

Γ bezeichne ein System von $l+r$ paarweise disjunkten, einfachen und rektifizierbaren Kurven, von denen l geschlossen und r nicht geschlossen sind. Auf jeder einzelnen Kurve Γ_i ($i=1,2,\dots, l+r$) des Systems Γ sei eine Richtung festgelegt, in der die Kurve bei der Integration durchlaufen wird (bei den nicht geschlossenen vom Anfangspunkt a_i bis zum Endpunkt b_i ($i=1,2,\dots,r$)). Die Bogenlänge s_i von Γ_i sei in dieser Richtung (insbesondere, falls Γ_i nicht geschlossen ist: von a_i aus) gezählt. Bei den geschlossenen Kurven Γ_i kann jeder Punkt von Γ_i als Anfangspunkt (=Endpunkt) zur Berechnung der Bogenlänge gewählt werden. ✓

Es sei ρ eine auf Γ definierte ⁵⁾, nicht negative und summierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass auch ρ^{1-q} zu $L(\Gamma)$ gehört für eine reelle Zahl $q>1$. Eine solche Funktion ist zum Beispiel

$$\rho(t) := \prod_{k=1}^{m_0} |t-c_k|^{-\frac{\gamma_k}{q-1}} \prod_{k=m_0+1}^{m_1} |t-c_k|^{-\gamma_k} \quad , t \in \Gamma ,$$

wobei $\gamma_k \in (0,1)$ und $c_k \in \Gamma$ für $k=1,2,\dots,m_0,\dots,m_1$. Mit $L_p(\Gamma, \rho)$, $p := \frac{q}{q-1}$, bezeichnen wir den normierten Raum (vergl. [7] Seite 9, aller auf Γ definierten komplexwertigen Funktionen φ , für die $|\varphi|^p \rho \in L(\Gamma)$ ist, wobei die Norm von φ durch

$$\|\varphi\|_{p,\rho} := \left[\int_{\Gamma} |\varphi(t)|^p \rho(t) |dt| \right]^{\frac{1}{p}}$$

definiert ist und je zwei Funktionen φ_1 und φ_2 miteinander identifiziert werden, falls $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{p,\rho} = 0$ ist. Speziell für $\rho=1$ setzen wir $\|\varphi\|_p := \|\varphi\|_{p,1}$.

Bemerkung 1.1 : Der Raum $L_p(\Gamma, \rho)$ ist im Raum $L(\Gamma)$ enthalten.

Denn jedes $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$ lässt sich als Produkt

$$\varphi = (\varphi \rho^{\frac{1}{p}}) \cdot \rho^{-\frac{1}{p}}$$

mit $(\varphi \rho^{\frac{1}{p}}) \in L_p(\Gamma)$ und $\rho^{-\frac{1}{p}} \in L_q(\Gamma)$ darstellen. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt dann sofort die Summierbarkeit von φ .

5) Mit Γ bezeichnen wir auch die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{l+r} \Gamma_i$. Missverständnisse dürften durch diese Vereinbarung nicht zu befürchten sein.

Bemerkung 1.2 : Die Abbildung $\mathfrak{F}$

$$(\mathfrak{F}\varphi)(t) := \rho^{-\frac{1}{p}}(t)\varphi(t) \quad , \quad t \in \Gamma \quad , \quad \varphi \in L_p(\Gamma) \quad ,$$

ist ein Isomorphismus des Banachraumes $L_p(\Gamma)$ auf den normierten Raum $L_p(\Gamma, \rho)$. Folglich ist $L_p(\Gamma, \rho)$ ein Banachraum.

Mit $C(\Gamma, \rho^{\frac{1}{p}})$ bezeichnen wir das Bild von $C(\Gamma)$ unter der Abbildung $\mathfrak{F}|C(\Gamma)$. Eine Aussage über die Approximierbarkeit von Funktionen aus $L_p(\Gamma, \rho)$ durch solche aus $C(\Gamma, \rho^{\frac{1}{p}})$ liefert der folg.

Hilfssatz 1.3 : Die Menge $C(\Gamma, \rho^{\frac{1}{p}})$ liegt dicht im Raume $L_p(\Gamma, \rho)$.

Beweis : Sei $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann ist $\varphi \rho^{\frac{1}{p}} \in L_p(\Gamma)$. Also existiert eine Funktion $g \in C(\Gamma)$ mit

$$\|g - \varphi \rho^{\frac{1}{p}}\|_p < \varepsilon \quad . \quad \text{Für } h := g \rho^{-\frac{1}{p}} \in C(\Gamma, \rho^{\frac{1}{p}}) \text{ gilt dann die Beziehung}$$

$$\|h - \varphi\|_{p, \rho} = \|(g \rho^{-\frac{1}{p}} - \varphi) \rho^{\frac{1}{p}}\|_p < \varepsilon \quad . \quad \text{q.e.d.}$$

Etwas tiefer liegt der folgende

Hilfssatz 1.4 : Der Raum $C(\Gamma)$ liegt dicht im Raum $L_p(\Gamma, \rho)$.

Beweis : Sei $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Auf Grund der absoluten Stetigkeit des Integrales existiert eine Zahl $\delta_1 > 0$, so dass gilt

$$\int_Y |\varphi|^p \rho \, dt < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \quad \text{für jede Teilmenge } Y \in \Gamma \text{ mit}$$

mes $Y < \delta_1$. Andererseits existiert zu jedem $\delta > 0$ eine messbare beschränkte Funktion f mit mes $E(f \neq \varphi) < \delta$ und

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \quad \text{für } t \in E(f \neq \varphi) \\ |f(t)| &\leq M \quad \text{für } t \in \Gamma \quad , \end{aligned}$$

wobei $E(f \neq \varphi) := \{t \in \Gamma, f(t) \neq \varphi(t)\}$ gesetzt ist (siehe z.B.

[14] Kap. IV, §4, Satz 1, Seite 110). Für die Funktion f haben wir

$$\begin{aligned} \|\varphi - f\|_{p, \rho}^p &= \int_{\Gamma} \rho |\varphi - f|^p \, dt = \int_{E(f \neq \varphi)} \rho |\varphi - f|^p \, dt = \int_{E(f \neq \varphi)} \rho |\varphi|^p \, dt < \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Wegen der absoluten Stetigkeit des Integrales existiert eine Zahl

$\delta_2 > 0$ - wir nehmen $\delta_2 < \delta_1$ an - , so dass gilt $\int_Y \rho |dt| < (\frac{\varepsilon}{4M})^p$

für jede Teilmenge $\gamma \subset \Gamma$ mit $\text{mes } \gamma < \delta_2$. Weiterhin existiert nach dem Satz von Lusin eine stetige Funktion g mit $\text{mes } E(g \neq f) < \delta_2$ und $\max_{t \in \Gamma} |g(t)| \leq M$. Damit ergibt sich schliesslich

$$\|\varphi - g\|_{p, \rho} \leq \|\varphi - f\|_{p, \rho} + \|f - g\|_{p, \rho} < \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{E(g \neq f)} \rho |f - g|^p |dt| \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{E(g \neq f)} \rho |dt| \cdot 2^{pM^p} \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon . \quad \text{q.e.d.}$$

Definition 1.5 : Seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und es sei $0 < \mu < 1$ und $f \in C[a, b]$. Wir sagen f erfüllt auf $[a, b]$ eine Hölderbedingung mit dem Exponenten μ , bzw. eine verschärfte Hölderbedingung mit dem Exponenten μ , wenn

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\mu} < \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x, y \in [a, b]}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\mu} = 0$$

für alle $y \in [a, b]$ ist.

Weiterhin sei m eine natürliche Zahl. Wir sagen dann: Die rektifizierbare Kurve Γ_j gehöre zur Klasse $C^{m, \mu}$ oder wir sagen: Γ_j ist eine $C^{m, \mu}$ -Kurve, wenn eine Parameterdarstellung

$$t(s) = x_1(s) + ix_2(s) , \quad s \in [0, \gamma], \quad i^2 = -1,$$

(s =Bogenabszisse von $t(s) \in \Gamma_j$, γ =Gesamtlänge von Γ_j , $x_1(s)$ und $x_2(s)$ die beiden kartesischen Koordinaten des Punktes $t(s)$ in der Gaußschen Zahlenebene) - existiert, in der x_1 und x_2 stetige Funktionen der Bogenlänge s sind, die stetige Ableitungen bis einschliesslich m -ter Ordnung besitzen und darüberhinaus die Ableitungen m -ter Ordnung je eine Hölderbedingung mit dem Exponenten μ auf $[0, \gamma]$ erfüllen.

Definition 1.6 : Sei Γ ein System endlich vieler einfacher und paarweise disjunkter $C^{m+1, \mu}$ -Kurven. Mit $C^{m, \mu}(\Gamma)$ bzw. $C_0^{m, \mu}(\Gamma)$ bezeichnen wir den Banachraum aller komplexwertigen m -mal stetig differenzierbaren Funktionen φ , deren m -te Ableitung $\varphi^{(m)}$ eine Hölderbedingung bzw. eine verschärfte Hölderbedingung auf Γ mit dem Exponenten μ erfüllt, d.h. es gilt

$$|\varphi^{(m)}(\tau) - \varphi^{(m)}(t)| = O(|\tau - t|^\mu) \quad \text{für } \tau \rightarrow t, \quad \tau, t \in \Gamma \quad \text{und } \mu \in (0, 1)$$

$$\text{bzw. } |\varphi^{(m)}(\tau) - \varphi^{(m)}(t)| = o(|\tau - t|^\mu) \quad \text{für } \tau \rightarrow t, \quad \tau, t \in \Gamma \quad \text{und } \mu \in (0, 1)$$

mit der (gleichen) Norm

$$\|\varphi\|_{C^{m,\mu}(\Gamma)} := \|\varphi\|_{C_0^{m,\mu}(\Gamma)} := \sum_{k=0}^m \|\varphi^{(k)}\|_{C(\Gamma)} + \sup_{\tau, t \in \Gamma} \frac{|\varphi^{(m)}(\tau) - \varphi^{(m)}(t)|}{|\tau - t|^\mu}$$

bezeichnet.

Wenn die obige Bedingung im ersten Falle (d.h. für gross 0) sogar mit $\mu=1$ erfüllt ist, dann sagt man, dass die m -te Ableitung von φ einer Lipschitzbedingung genügt. (Entsprechend ist der Begriff der $C^{m,1}$ -Kurve definiert). Ihre Gesamtheit mit der Norm $\|\cdot\|_{C^{m,1}(\Gamma)}$ (Man ersetze in der Definition für $C^{m,\mu}(\Gamma)$ und für seine Norm das μ durch 1) bildet einen Banachraum.

Bemerkung 1.6.1: Der Raum $C_0^{m,\mu}(\Gamma)$ ist ein abgeschlossener Unterraum des Raumes $C^{m,\mu}(\Gamma)$. Ausserdem sind für $0 < \mu \leq 1$ die Räume $C^{m,\mu}(\Gamma)$ in den Räumen $C_0^{m,\nu}(\Gamma)$ enthalten.

Definition 1.7: Sei Γ ein System endlich vieler, einfacher und paarweise disjunkter $C^{m,\mu}$ -Kurven. Mit $W_p^m(\Gamma, \rho)$, $p > 1$, wobei m eine nicht negative ganze Zahl ist, bezeichnen wir den Raum aller Funktionen $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$, die verallgemeinerte Ableitungen $\varphi^{(k)} \in L_p(\Gamma, \rho)$, $k=0, 1, 2, \dots, m$, im Sobolewschen Sinne besitzen, normiert durch

$$\|\varphi\|_{W_p^m} := \sum_{k=0}^m \|\varphi^{(k)}\|_{p,\rho}, \quad \varphi^{(0)} := \varphi \in W_p^m(\Gamma, \rho).$$

Speziell für $\rho=1$ schreiben wir einfacher $\|\varphi\|_{W_p^m} := \|\varphi\|_{W_{p,1}^m}$ und

$W_p^m(\Gamma) := W_p^m(\Gamma, 1)$. Später, im 4. Abschnitt werden wir sehen, dass $W_p^m(\Gamma, \rho)$ ein Banachraum ist.

Definition 1.8: Mit $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$, $p > 1$, wobei m eine nicht negative ganze Zahl und n eine natürliche Zahl ist, bezeichnen wir den Raum aller n -dimensionalen Vektoren φ , deren Komponenten φ_v , $v=1, 2, \dots, n$, Elemente des Raumes $W_p^m(\Gamma, \rho)$ sind. Dieser Raum wird zu einem normierten Raum durch die Festlegung:

$$\|\varphi\|_{W_{p,n}^m(\Gamma,\rho)} := \sum_{v=0}^n \|\varphi_v\|_{W_{p,\rho}^m}, \quad \varphi := \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}.$$

2. Abschnitt

DIE EINBETTUNG VON $W_p^m(\Gamma,\rho)$ in $C^{m-1}(\Gamma)$:

Hilfssatz 2.1 (Einbettungssatz) : Sei $p > 1$, $m \geq 1$ (ganzz.) und ρ eine nicht negative summierbare Funktion auf Γ mit der Eigenschaft , dass ρ^{-s} summierbar ist für eine reelle Zahl s , die der Ungleichung

$$\frac{1}{p-1} < s \quad (1)$$

genügt . Dann lässt sich der Raum $W_p^m(\Gamma,\rho)$ stetig in den Raum $C^{m-1}(\Gamma)$ einbetten .

Beweis : Sei $\varphi \in W_p^m(\Gamma,\rho)$, dann gilt für $k=0,1,\dots,m$

$$\varphi^{(k)} \rho^{\frac{1}{p}} \in L_p(\Gamma) .$$

$$\text{Also ist } |\varphi^{(k)} \rho^{\frac{1}{p}}|^{\frac{sp}{1+s}} \in L_{\frac{1+s}{s}}(\Gamma) \quad (2)$$

für $k=0,1,\dots,m$.

Wegen $\rho^{-s} \in L(\Gamma)$ gilt ausserdem

$$\rho^{-\frac{s}{1+s}} \in L_{1+s}(\Gamma) . \quad (3)$$

Nun sind die Exponenten $\frac{1+s}{s}$ und $1+s$ zueinander konjugiert . Deshalb gilt

$$|\varphi^{(k)}|^{\frac{sp}{1+s}} = |\varphi^{(k)} \rho^{\frac{1}{p}}|^{\frac{sp}{1+s}} \cdot \rho^{-\frac{s}{1+s}} \in L(\Gamma) .$$

Wir haben somit $\varphi^{(k)} \in L^r(\Gamma)$ für $k=0,1,\dots,m$, wobei (4)

$$r := \frac{sp}{1+s} > 1 \quad (5)$$

wegen (1) .

Die Beziehung (4) ist aber gleichbedeutend mit $\varphi \in W_r^m(\Gamma)$.

Nun lässt sich bekanntlich der Raum $W_r^m(\Gamma)$, $r > 1$, $m \geq 1$ stetig in den Raum $C^{m-1}(\Gamma)$ einbetten³⁾ . Es ist somit nur noch zu zeigen,

*) vgl.[13] Seite 317

dass die Einbettung von $W_p^m(\Gamma, \rho)$ in $W_r^m(\Gamma)$ stetig ist, d.h. dass

$$\|\varphi\|_{W_r^m} \leq M_1 \|\varphi\|_{W_p^m} \quad (6)$$

gilt für jedes $\varphi \in W_p^m(\Gamma, \rho)$, bei M_1 unabhängig von φ ist.

Sei also $\varphi \in W_p^m(\Gamma, \rho)$. Wir schätzen für $k=0,1,\dots,m$ die $L_r(\Gamma)$ -Norm von $\varphi^{(k)}$ mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung für die zueinander konjugierten Exponenten $\frac{1+s}{s}$ und $1+s$ ab:

$$\begin{aligned} \|\varphi^{(k)}\|_r^r &= \int_{\Gamma} |\varphi^{(k)}(t)|^r |dt| = \int_{\Gamma} |\varphi^{(k)}(t)|^r \rho^{\frac{r}{p}}(t) \cdot \rho^{-\frac{r}{p}}(t) |dt| \\ &\leq \left[\int_{\Gamma} |\varphi^{(k)}(t)|^p \rho(t) |dt| \right]^{\frac{r}{p}} \cdot \left[\int_{\Gamma} \rho^{-\frac{r}{p}(1+s)}(t) |dt| \right]^{\frac{1}{1+s}} \\ &= \|\varphi^{(k)}\|_{p,\rho}^r \cdot \|\rho^{-s}\|_{sp}^{\frac{r}{p}}. \end{aligned}$$

Also gilt $\|\varphi^{(k)}\|_r \leq M_1 \|\varphi^{(k)}\|_{p,\rho}$ für $k=0,1,\dots,m$, wobei

$M_1 := \|\rho^{-s}\|_{sp}^{\frac{1}{p}}$ gesetzt wurde. Wir summieren auf beiden Seiten der letzten Ungleichung von $k=0$ bis $k=m$ und erhalten (6) .q.e.d.

Im letzten Hilfssatz wurde die stetige Einbettbarkeit des Raumes $L_p(\Gamma, \rho)$ in den Raum $L_r(\Gamma)$ für hinreichend kleines $r>1$ bewiesen. (Die engere Voraussetzung $m \geq 1$ wurde nur wegen der schärferen Aussage des Hilfssatzes gemacht). Der umgekehrte Sachverhalt, nämlich die stetige Einbettung der Räume $L_u(\Gamma)$ für hinreichend grosses u in den Raum $L_p(\Gamma, \rho)$ liegt dem folgenden Hilfssatz zugrunde.

Hilfssatz 2.2 (Einbettungssatz): Sei ρ eine auf Γ definierte nicht negative Funktion, so dass $\rho^t \in L(\Gamma)$ für ein $t>1$ ist. Dann lässt sich jeder Raum $L_u(\Gamma)$ mit

$$u > \frac{t}{t-1}$$

stetig in den Raum $L_p(\Gamma, \rho)$, $p := \frac{u}{t}(t-1)$, einbetten.

Beweis: Sei $\varphi \in L_u(\Gamma)$, dann gilt $|\varphi|^p \in L_{\frac{u}{p}}(\Gamma)$. Also

haben wir $|\varphi|^p \rho \in L(\Gamma)$, da die Exponenten $\frac{u}{p}$ und t zueinander konjugiert sind. φ liegt demnach im Raum $L_p(\Gamma, \rho)$. Wir zeigen nun, dass die Einbettung stetig erfolgt, d.h. dass

$$\|\varphi\|_{p, \rho} \leq M_2 \|\varphi\|_u \quad \text{für alle } \varphi \in L_u(\Gamma) \text{ gilt. Dies}$$

$$\text{sieht man aber sofort mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung}$$

$$\|\varphi\|_{p, \rho} = \int_{\Gamma} |\varphi(\tau)|^p \cdot \rho(\tau) |d\tau| \leq \left[\int_{\Gamma} |\varphi(\tau)|^{\frac{p u}{p}} |d\tau| \right]^{\frac{p}{u}} \left[\int_{\Gamma} \rho^t(\tau) |d\tau| \right]^{\frac{1}{t}}.$$

Dabei zeigt sich, dass für M_2 die Zahl $\|\rho\|_{\frac{p}{t}}^{\frac{1}{p}}$ genommen werden kann. q.e.d.

Ein Beispiel für ein ρ , dass sowohl den Voraussetzungen von Hilfssatz 2.1 als auch denen von Hilfssatz 2.2 genügt, ist

$$\rho(\tau) := |\tau - c_1|^{-\alpha} \cdot |\tau - c_2|^{\beta(p-1)}, \quad \tau, c_1, c_2 \in \Gamma, \quad \alpha, \beta \in [0, 1]$$

Man setze z.B. $s := \frac{2}{\beta+1} \cdot \frac{1}{p-1}$ bzw. $t := \frac{2}{1+\alpha}$.

3. Abschnitt

KONSTRUKTION EINER FOLGE VON MITTELUNGSFUNKTIONEN :

Sei $\varphi \in L[a, b]$. Wir setzen :

$$\varphi_*(x) := \begin{cases} \varphi(x) & , \quad x \in [a, b] \\ 0 & , \quad x \in [a-2, a) \cup (b, b+2] \end{cases} \quad (1)$$

und

$$\omega(x) := \begin{cases} c e^{\frac{x^2}{x^2-1}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \text{ und } x \in [a-b-2, b-a+2]. \end{cases}$$

Dabei sei c durch die Bedingung $\int_{|x| \leq 1} \omega(x) dx = 1$ festgelegt.

Wir benutzen nun die Funktion ω zur Konstruktion einer Folge von Mittelungsfunktionen φ_n zur gegebenen Funktion φ (vergl. [13], [15]), indem wir definieren

$$\varphi_n(x) := n \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varphi_*(\sigma) \omega(n|x-\sigma|) d\sigma, \quad x \in [a-1, b+1], \quad n=1, 2, \dots$$

Für diesen 3. Abschnitt vereinbaren wir, die n -te Mittelungsfunktion von einer Funktion aus $L[a, b]$ durch den unten nachgestellten Index n am Funktionssymbol zu kennzeichnen.

Bekanntlich ist $\varphi_n \in C^\infty[a, b]$, $n=1, 2, \dots$ und für $\varphi \in W_p^m[a, b]$ gilt:

$$(\varphi_n)^{(k)} = (\varphi^{(k)})_n =: \varphi_n^{(k)}, \quad k=1, 2, \dots, m, \quad n=1, 2, \dots \quad (2)$$

In den folgenden Hilfssätzen dieses Abschnittes wird die Approximation von φ_n an $\tilde{\varphi}$,

$$\tilde{\varphi} := \varphi_*|_{[a-1, b+1]} \quad (3)$$

in der Norm des Raumes $W_p^m([a-1, b+1], \rho)$ bzw. $W_p^m([a-1, b+1], \rho^{\frac{1}{1-p}})$,

wobei $\rho(x) := |x-a|^{\alpha(p-1)} |b-x|^{\beta(p-1)}$, $x \in [a-1, b+1]$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ und $p > 1$ angenommen wird, untersucht.

Hilfssatz 3.1: Sei $p > 1$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$,

$\rho(x) := |x-a|^{\alpha(p-1)} |b-x|^{\beta(p-1)}$ für $x \in [a-1, b+1]$

und $\varphi \in L_p([a, b], \rho|_{[a, b]})$. Dann gilt

$$\|\varphi_n\|_{p, \rho} \leq M \|\tilde{\varphi}\|_{p, \rho} \quad \text{für } n=1, 2, \dots, \quad (4)$$

wobei $\tilde{\varphi}$ durch (3) und (1) definiert ist und M weder von φ noch von n abhängt.

Beweis: Wir setzen die Gewichtsfunktion ρ zu $\rho_*(x)$,

$$\rho_*(x) := |x-a|^{\alpha(p-1)} |b-x|^{\beta(p-1)}, \quad x \in [a-2, b+2]$$

von $[a-1, b+1]$ auf $[a-2, b+2]$ stetig fort und zeigen zunächst, dass die Funktionen $F(n)$, wobei

$$F(n)(x) := |x-a|^\alpha |b-x|^\beta g_n(x),$$

$$\text{und } g_n(x) := \int_{-1}^1 \rho_*(x+\frac{u}{n})^{-\frac{1}{p-1}} \omega(u) du \quad x \in [a-1, b+1], \quad n=1, 2, \dots$$

gesetzt worden ist, auf $[a-1, b+1]$ gleichgradig beschränkt sind.

Die Funktion $\rho_{(*)}^{-\frac{1}{p-1}}$ besitzt höchstens (für $\alpha \neq 0 \neq \beta$) im Punkte $d := \frac{\alpha b + \beta a}{\alpha + \beta} \in (a, b)$ ein relatives Minimum.

Wir führen unsere Betrachtung zunächst nur für alle natürlichen Zahlen $n > n_0 := \frac{3}{\min\{d-a, b-d\}} + 2$ durch. Dazu wählen wir ein beliebiges aber festes $n > n_0$ und geben auf jedem der fünf Teilsegmente: $[a-1, a-\frac{2}{n}]$, $[a-\frac{2}{n}, a+\frac{2}{n}]$, $[a+\frac{2}{n}, b-\frac{2}{n}]$, $[b-\frac{2}{n}, b+\frac{2}{n}]$ und $[b+\frac{2}{n}, b+1]$ von $[a-1, b+1]$ für $F(n)$ eine von n unabhängige obere Schranke an.

1. Sei $x \in [a-1, a-\frac{2}{n}]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \int_{-1}^1 |x - a + \frac{u}{n}|^{-\alpha} (b - x - \frac{u}{n})^{-\beta} \omega(u) du < \\ &< \int_{-1}^1 |x - a - (\frac{x-a}{2})|^{-\alpha} (b-a)^{-\beta} \omega(u) du < 2|x-a|^{-\alpha} (b-a)^{-\beta}. \end{aligned}$$

Also ist $|F_n(x)| < 2(b-x)^{\beta}(b-a)^{-\beta} \leq 2(\frac{b-a+1}{b-a})^{\beta}$, $x \in [a-1, a-\frac{2}{n}]$, $n > n_0$

2. Sei $x \in [a-\frac{2}{n}, a+\frac{2}{n}]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \int_{-1}^1 |x - a + \frac{u}{n}|^{-\alpha} (b - x - \frac{u}{n})^{-\beta} \omega(u) du < \\ &< (b-d)^{-\beta} c \int_{-1}^1 |x - a + \frac{u}{n}|^{-\alpha} du \leq \\ &\leq (b-d)^{-\beta} c \int_{-1}^1 |\frac{u}{n}|^{-\alpha} du = \frac{2c}{1-\alpha} (b-d)^{-\beta} n^{\alpha} < \\ &< \frac{4c}{1-\alpha} (b-d)^{-\beta} (\frac{2}{n})^{-\alpha} \leq \frac{4c}{1-\alpha} (b-d)^{-\beta} |x-a|^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Also ist $|F(n)(x)| < \frac{4c}{1-\alpha} (\frac{b-a}{b-d})^{\beta}$ für $x \in [a-\frac{2}{n}, a+\frac{2}{n}]$ und $n > n_0$.

3. Sei $x \in [a+\frac{2}{n}, b-\frac{2}{n}]$. Dann gilt :

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \int_{-1}^1 (x-a+\frac{u}{n})^{-\alpha} (b-x-\frac{u}{n})^{-\beta} \omega(u) du \leq \\ &\leq \int_{-1}^1 (x-a-\frac{\{x-a\}}{2})^{-\alpha} (b-x-\frac{\{b-x\}}{2})^{-\beta} \omega(u) du < 4(x-a)^{-\alpha}(b-x)^{-\beta}. \end{aligned}$$

Also ist $|F_{(n)}(x)| < 4$ für $x \in [a+\frac{2}{n}, b-\frac{2}{n}]$, $n > n_0$.

4. Sei $x \in [b-\frac{2}{n}, b+\frac{2}{n}]$. Dann gilt $|F_{(n)}(x)| < \frac{4c}{1-\beta} (\frac{b-a}{d-a})^\alpha$

für $n > n_0$. Dies erkennt man, indem in der obigen Abschätzung für das Segment $[a-\frac{2}{n}, a+\frac{2}{n}]$ alle runden Klammern durch Betragsstriche ersetzt und a, α entsprechend mit b, β vertauscht werden. Ebenso erkennt man, dass

5. $|F_{(n)}(x)| < 2(\frac{b-a+1}{b-a})^\alpha$ für $x \in [b+\frac{2}{n}, b+1]$ und $n > n_0$ gilt.

Wie eine einfache Betrachtung von $F_{(n)}$ für $n=1, 2, \dots, [n_0]$ zeigt ⁶⁾, ist für $\alpha \neq \beta$

$$|F_{(n)}(x)| < cn(b-a)^{\alpha+\beta} \left\{ \frac{(d-a)^{1-\alpha} + (\frac{1}{n})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(b-d)^\beta} + \frac{(b-d)^{1-\beta} + (\frac{1}{n})^{1-\beta}}{(1-\beta)(d-a)^\alpha} \right\} <$$

$$< cn_0(b-a)^{\alpha+\beta} \left\{ \frac{(d-a)^{1-\alpha} + 2}{(1-\alpha)(b-d)^\beta} + \frac{(b-d)^{1-\beta} + 2}{(1-\beta)(d-a)^\alpha} \right\} =: M'_0.$$

Ein ähnliches Ergebnis liefern die ausgeschlossenen Fälle $\alpha=0 \neq \beta$, $\alpha \neq 0 = \beta$ und $\alpha=\beta=0$ mit $|F_{(n)}(x)| < M''_0 < M'_0 + M''_0 =: M_0$.

Wir setzen $M := (\max\{M_0, 2(\frac{b-a+1}{b-a})^\beta, \frac{4c}{1-\alpha}(\frac{b-a}{b-d})^\beta, \frac{4c}{1-\beta}(\frac{b-a}{d-a})^\alpha,$

$2(\frac{b-a+1}{b-a})^\alpha\})^{\frac{p-1}{p}}$. Wir haben dann $|F_{(n)}(x)| < M^{\frac{p}{p-1}}$ für

$x \in [a-1, b+1]$ und $n=1, 2, \dots$, wobei M weder von φ noch von n abhängt.

Jetzt werden wir die Formel (4) beweisen. Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung erhalten wir

6) Mit $[n_0]$ bezeichnen wir hier die grösste ganze Zahl n , die nicht grösser als n_0 ist.

$$\begin{aligned}
 |\varphi_n(x)|^p &= \left| n \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varphi_{**}(\sigma) \omega(n|x-\sigma|) d\sigma \right|^p \leq \\
 &\leq \left(\int_{-1}^1 |\varphi_{**}(x+\frac{u}{n})| \omega(u) du \right)^p = \\
 &= \left(\int_{-1}^1 |\varphi_{**}(x+\frac{u}{n})| \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) \omega^{\frac{1}{p}}(u) \cdot \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) \omega^{\frac{p-1}{p}}(u) du \right)^p \leq \\
 &\leq \int_{-1}^1 |\varphi_{**}(x+\frac{u}{n})|^p \rho_{(*)}(x+\frac{u}{n}) \omega(u) du \cdot \left(\int_{-1}^1 \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p-1}}(x+\frac{u}{n}) \omega(u) du \right)^{p-1}.
 \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
 \|\varphi_n\|_{p, \rho}^p &= \int_{a-1}^{b+1} \rho_{(*)}(x) |\varphi_n(x)|^p dx \leq \\
 &\leq \int_{a-1}^{b+1} \rho_{(*)}(x) \int_{-1}^1 |\varphi_{**}(x+\frac{u}{n})|^p \rho_{(*)}(x+\frac{u}{n}) \omega(u) du \left(\int_{-1}^1 \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p-1}}(x+\frac{u}{n}) \omega(u) du \right)^{p-1} dx = \\
 &= \int_{a-1}^{b+1} \int_{-1}^1 |\varphi_{**}(x+\frac{u}{n})|^p \rho_{(*)}(x+\frac{u}{n}) \omega(u) du \cdot [\rho_{(*)}(x)]^{p-1} dx < \\
 &< M^p \int_{a-1}^{b+1} \int_{-1}^1 |\varphi_{**}(x+\frac{u}{n})|^p \rho_{(*)}(x+\frac{u}{n}) \omega(u) du dx.
 \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Fubini darf die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden. Damit ergibt sich für den letzten Ausdruck

$$= M^p \int_{-1}^1 \int_{a-1}^{b+1} |\varphi_{**}(x+\frac{u}{n})|^p \rho_{(*)}(x+\frac{u}{n}) dx \omega(u) du =$$

$$= M^p \int_{-1}^1 \int_{a-1}^{b+1} |\tilde{\varphi}(x)|^p \rho(x) dx \omega(u) du = M^p \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p, \quad n=1,2,\dots$$

Damit ist die Formel (4) bewiesen. q.e.d.

Hilfssatz 3.2 : Sei $\alpha, \beta \in [0,1)$, $p > 1$,

$$\rho(x) := |x-a|^{\alpha(p-1)} |b-x|^{\beta(p-1)} \quad \text{für } x \in [a-1, b+1]$$

und $\varphi \in W_{p,\rho}^m([a,b], \rho|_{[a,b]})$. Dann gilt

$$\|\varphi_n\|_{W_{p,\rho}^m} \leq M \|\tilde{\varphi}\|_{W_{p,\rho}^m}, \quad n=1,2,\dots \quad (5)$$

$$\text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{W_{p,\rho}^m} = 0. \quad (6)$$

Beweis : Formel (5) folgt sofort aus (2) und Hilfssatz 3.1.

Aus (2) folgt ausserdem, dass für den Beweis der Formel (6) nur noch zu zeigen ist, dass die folgende Behauptung (7) gilt :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \tilde{\varphi}\|_{p,\rho} = 0 \quad \text{für beliebiges } \varphi \in L_p([a,b], \rho|_{[a,b]}) \quad (7)$$

Zunächst sei $g \in C([a,b], \rho^{\frac{1}{p}}|_{[a,b]})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir setzen

$$g_*(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{für } x \in [a-2, a) \cup (b, b+2] \end{cases},$$

$$h_*(x) := \rho^{\frac{1}{p}}(x) g_*(x) \quad \text{für } x \in [a-2, b+2],$$

$$\tilde{g} := g_*|_{[a-1, b+1]}, \quad \tilde{h} := h_*|_{[a-1, b+1]}, \quad h := \tilde{h}|_{[a,b]}.$$

Bekanntlich 7) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - \tilde{h}\|_p = 0,$$

also existiert eine Zahl N_1 mit der Eigenschaft, dass

$$\|h_n - \tilde{h}\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n > N_1. \quad (8)$$

Weiter unten wird gezeigt werden, dass auch eine Zahl N_2 existiert mit

7) vergl. [13] oder [15]

$$\| \rho^{\frac{1}{p}} \varepsilon_n - h_n \|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n > N_2. \quad (9)$$

Die Beziehungen (8) und (9) ergeben zusammen

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_n - \tilde{\varepsilon}\|_{p,\rho} &= \|\rho^{\frac{1}{p}} \varepsilon_n - \rho^{\frac{1}{p}} \tilde{\varepsilon}\|_p = \|\rho^{\frac{1}{p}} \varepsilon_n - \tilde{h}\|_p \leq \\ &\leq \|\rho^{\frac{1}{p}} \varepsilon_n - h_n\|_p + \|h_n - \tilde{h}\|_p < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da ε beliebig war, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varepsilon_n - \tilde{\varepsilon}\|_{p,\rho} = 0 \quad \text{für jedes } g \in C([a,b], \rho^{\frac{1}{p}} | [a,b]). \quad (10)$$

Nun sei $\varphi \in L_p([a,b], \rho | [a,b])$ und wieder $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

Nach Hilfssatz 1.3 existiert ein $g \in C([a,b], \rho^{\frac{1}{p}} | [a,b])$ mit

$$\|\varphi - g\|_{p,\rho} | [a,b] < \frac{\varepsilon}{3M}. \quad (11)$$

Wir nehmen hierbei an, dass $M \geq 1$ ist, andernfalls muss von g

$$\|\varphi - g\|_{p,\rho} | [a,b] < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{gefordert werden und}$$

alles Weitere gilt auch.

Wegen $\varphi_n - \varepsilon_n = (\varphi - g)_n$ gilt nach Hilfssatz 3.1

$$\|\varphi_n - \varepsilon_n\|_{p,\rho} \leq M \|\varphi - g\|_{p,\rho} = M \|\varphi - g\|_{p,\rho} | [a,b] < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (12)$$

Auf Grund von (10) existiert eine Zahl N mit

$$\|\varepsilon_n - \tilde{\varepsilon}\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } n > N. \quad (13)$$

Aus (11) bis (13) ergibt sich sofort

$$\|\varphi_n - \tilde{\varphi}\|_{p,\rho} \leq \|\varphi_n - \varepsilon_n\|_{p,\rho} + \|\varepsilon_n - \tilde{\varepsilon}\|_{p,\rho} + \|\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varphi}\|_{p,\rho} < \varepsilon$$

für $n > N$. Dies ist aber die Behauptung (7). Um den Beweis unseres Hilfssatzes zu vollenden, zeigen wir nun, dass (9) gilt. Dabei setzen wir wieder

$$\rho_{(*)}(x) := |x-a|^{\alpha(p-1)} |b-x|^{\beta(p-1)} \quad \text{für } x \in [a-2, b+2].$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \| \rho^{\frac{1}{p}} g_n - h_n \|_p^p &= \| \rho^{\frac{1}{p}} g_n - (\rho^{\frac{1}{p}} g)_n \|_p^p = \\
 &= \int_{a-1}^{b+1} | n \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \{ \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x) - \rho^{\frac{1}{p}}(*) (\sigma) \} g_*(\sigma) \omega(n|x-\sigma|) d\sigma |^p dx \leq \\
 &\leq \int_{a-1}^{b+1} \{ \int_{-1}^1 | \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x+\frac{u}{n}) - \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x) | \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x+\frac{u}{n}) | h_*(x+\frac{u}{n}) | \omega(u) du \}^p dx \\
 &\leq \{ c \max_{x \in [a, b]} |h(x)| \}^p \int_{a-1}^{b+1} \int_{-1}^1 \frac{ | \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x+\frac{u}{n}) - \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x) | }{ \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x+\frac{u}{n}) } du \}^p dx. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Nun setzen wir voraus, dass $\alpha, \beta \in (0, 1)$ ist. Mit d bezeichnen wir den Punkt, in dem die Funktion

$$\rho^{\frac{1}{p}}(*) \quad \text{ihr einziges relatives Maximum} \quad \rho^{\frac{1}{p}}(*) (d) = (\alpha' \frac{b-a}{\alpha'+\beta'})^{\alpha'} (\beta' \frac{b-a}{\alpha'+\beta'})^{\beta'}$$

annimmt. Dabei wurde $\beta' := \rho^{\frac{p-1}{p}}$ und $\alpha' := \alpha \frac{p-1}{p}$ gesetzt. Stets gilt $\alpha', \beta' \in (0, 1)$. Wir setzen wieder $n_0 := 2 + 3 \min^{-1} \{d-a, b-d\}$ und werden den Integralausdruck

$$\int_{a-1}^{b+1} \{ \int_{-1}^1 | \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x+\frac{u}{n}) - \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x) | \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x+\frac{u}{n}) du \}^p dx$$

für beliebiges aber festes $n > n_0$ majorisieren. Dazu unterteilen wir das Segment $[a-1, b+1]$ durch die Punkte $a-\frac{1}{n}$, $a+\frac{1}{n}$, $d-\frac{1}{n}$, $d+\frac{1}{n}$, $b-\frac{1}{n}$, $b+\frac{1}{n}$ in sieben Teilsegmente.

1. Sei $x \in [a-1, a-\frac{1}{n}]$:

Weil $\rho^{\frac{1}{p}}(*)$ auf $[a-1, a-\frac{1}{n}]$ monoton fällt, gilt:

$$\int_{-1}^1 | \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x+\frac{u}{n}) - \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x) | \rho^{\frac{1}{p}}(*) (x+\frac{u}{n}) du =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^0 \{ \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) \} \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) du + \int_0^1 \{ \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) \} \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) du = \\
 &= - \int_{-1}^0 \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) du + \int_0^1 \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) du = \\
 &= - \int_0^1 \left\{ \frac{a-x}{a-x+\frac{u}{n}} \right\}^{\alpha'} \left\{ \frac{b-x}{b-x+\frac{u}{n}} \right\}^{\beta'} du + \int_0^1 \left\{ \frac{a-x}{a-x-\frac{u}{n}} \right\}^{\alpha'} \left\{ \frac{b-x}{b-x-\frac{u}{n}} \right\}^{\beta'} du .
 \end{aligned}$$

Wegen $\left\{ \frac{b-x}{b-x+\frac{u}{n}} \right\}^{\beta'} \geq \left\{ \frac{b-x}{b-x+\frac{1}{n}} \right\}^{\beta'} = \{ 1 + \frac{1}{n(b-x)} \}^{-\beta'} \geq 1 - \frac{\beta'}{n(b-x)} > 1 - \frac{\beta'}{n(b-a)}$

und $\left\{ \frac{b-x}{b-x-\frac{u}{n}} \right\}^{\beta'} \leq \left\{ \frac{b-x}{b-x-\frac{1}{n}} \right\}^{\beta'} = \{ 1 - \frac{1}{n(b-x)} \}^{-\beta'} \leq 1 + \frac{2\beta'}{n(b-x)} < 1 + \frac{2\beta'}{n(b-a)}$

(beidmal $u \in [0, 1]$ und $n > n_0$) können wir die beiden Integranden abschätzen und erhalten mithin

$$\begin{aligned}
 &< - \left\{ 1 - \frac{\beta'}{n(b-a)} \right\} \int_0^1 \left\{ 1 + \frac{u}{n(a-x)} \right\}^{-\alpha'} du + \left\{ 1 + \frac{2\beta'}{n(b-a)} \right\} \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{u}{n(a-x)} \right\}^{-\alpha'} du = \\
 &= R_1 + R_2 . \tag{15}
 \end{aligned}$$

Dabei wurde $R_1 := \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{u}{n(a-x)} \right\}^{-\alpha'} du - \int_0^1 \left\{ 1 + \frac{u}{n(a-x)} \right\}^{-\alpha'} du$

und $R_2 := \frac{\beta'}{n(b-a)} \left[\int_0^1 \left\{ 1 + \frac{u}{n(a-x)} \right\}^{-\alpha'} du + 2 \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{u}{n(a-x)} \right\}^{-\alpha'} du \right]$

gesetzt . Wir schätzen zunächst R_1 nach oben ab .

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{n(a-x)}{1-\alpha'} \{ 1 - [1 - \frac{1}{n(a-x)}]^{1-\alpha'} - [1 + \frac{1}{n(a-x)}]^{1-\alpha'} + 1 \} = \\
 &= \frac{n(a-x)}{1-\alpha'} \{ 2 - \sum_{v=0}^{\infty} \binom{1-\alpha'}{v} (-1)^v (\frac{1}{n(a-x)})^v - \sum_{v=0}^{\infty} \binom{1-\alpha'}{v} [\frac{1}{n(a-x)}]^v \} = \\
 &= \frac{-2}{1-\alpha'} \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{1-\alpha'}{2\mu+2} [\frac{1}{n(a-x)}]^{2\mu+1} = \\
 &= 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha') \cdot \alpha' \cdot (\alpha'+1) \cdot (\alpha'+2) \cdot \dots \cdot (\alpha'+2\mu)}{(1-\alpha') \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (1+2\mu)} \cdot \frac{1}{2\mu+2} \cdot [\frac{1}{n(a-x)}]^{2\mu+1} < \\
 &< 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2\mu+1} \cdot [\frac{1}{n(a-x)}]^{2\mu+1} < 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} [\frac{1}{n(a-x)}]^v = -2 \ln [1 - \frac{1}{n(a-x)}] , \\
 R_1 &< -2 \ln [1 - \frac{1}{n(a-x)}] . \quad (16)
 \end{aligned}$$

Nun wird R_2 nach oben abgeschätzt .

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \frac{\beta'}{n(b-a)} \cdot \frac{n(a-x)}{1-\alpha'} \{ [1 + \frac{1}{n(a-x)}]^{1-\alpha'} - 1 + 2 - 2 [1 - \frac{1}{n(a-x)}]^{1-\alpha'} \} = \\
 &= \frac{\beta'}{n(b-a)} \cdot \frac{n(a-x)}{1-\alpha'} \{ 1 + \sum_{v=0}^{\infty} \binom{1-\alpha'}{v} [\frac{1}{n(a-x)}]^v - 2 \sum_{v=0}^{\infty} \binom{1-\alpha'}{v} (-1)^v [\frac{1}{n(a-x)}]^v \} = \\
 &= \frac{\beta'}{n(b-a)} \cdot \frac{1}{1-\alpha'} \{ \sum_{v=0}^{\infty} \binom{1-\alpha'}{2v+1} [\frac{1}{n(a-x)}]^{2v} - \sum_{v=0}^{\infty} \binom{1-\alpha'}{2v+2} [\frac{1}{n(a-x)}]^{2v+1} \} = \\
 &= \frac{\beta'}{n(b-a)} \cdot \{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha') \cdot \alpha' \cdot (\alpha'+1) \cdot \dots \cdot (\alpha'+2\mu-1)}{(1-\alpha') \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2\mu} \cdot \frac{1}{2\mu+1} [\frac{1}{n(a-x)}]^{2\mu} + \\
 &\quad + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha') \cdot \alpha' \cdot (\alpha'+1) \cdot \dots \cdot (\alpha'+2\mu)}{(1-\alpha') \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (1+2\mu)} \cdot \frac{1}{2\mu+2} [\frac{1}{n(a-x)}]^{2\mu+1} \} < \\
 &< \frac{\beta'}{n(b-a)} \{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2\mu+1} [\frac{1}{n(a-x)}]^{2\mu} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2\mu+2} [\frac{1}{n(a-x)}]^{2\mu+1} \} \leq \\
 &\leq \frac{\beta'}{n(b-a)} \{ \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} [\frac{1}{n(a-x)}]^v \} = \frac{\beta'}{n(b-a)} [1 - \ln [1 - \frac{1}{n(a-x)}]] .
 \end{aligned}$$

Zusammen mit (15) und (16) ergibt dies nunmehr :

$$\int_{-1}^1 | \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) | \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) du <$$

$$< \frac{3\beta'}{n(b-a)} + [2 + \frac{3\beta'}{n(b-a)}] \{-\ln[1 - \frac{1}{n(a-x)}]\} \quad \text{.}$$

$$< \frac{3\beta'}{n(b-a)} + (2+1) |\ln [1 - \frac{1}{n(a-x)}]| \quad \text{.}$$

Daraus folgt :

$$\int_{a-1}^{a-\frac{1}{n}} \left[\int_{-1}^1 \left| \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) \right| \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) du \right]^p dx <$$

$$< 2^{p-1} \left[\frac{3\beta'}{n(b-a)} \right]^p (1-\frac{1}{n}) + 2^{p-1} 3^p \int_{a-1}^{a-\frac{1}{n}} |\ln[1 - \frac{1}{n(a-x)}]|^p dx =$$

$$= 2^{p-1} \left[\frac{3\beta'}{n(b-a)} \right]^p (\frac{n-1}{n}) + \frac{6^p}{2n} \int_{\ln \frac{n}{n-1}}^{\infty} \frac{y^p e^{-y}}{(1-e^{-y})^2} dy <$$

$$< \frac{6^p}{2n^p (b-a)^p} + \frac{6^p}{2n} \int_0^{\infty} \frac{y^p e^{-y}}{(1-e^{-y})^2} dy = O(\frac{1}{n}) \quad ,$$

$$\text{weil } \int_0^{\infty} \frac{y^p e^{-y}}{(1-e^{-y})^2} dy = \int_0^1 \frac{y^p}{2(\cosh y-1)} dy + \int_1^{\infty} \frac{y^p e^{-y}}{(1-e^{-y})^2} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^{p-2}}{1 + \frac{2y^2}{4!} + \frac{2y^4}{6!} + \frac{2y^6}{8!} + \dots} dy + \int_1^{\infty} \frac{y^p e^{-y}}{(1-e^{-y})^2} dy <$$

$$< \int_0^1 y^{p-2} dy + \int_1^{\infty} \frac{y^p e^{-y}}{(1-e^{-1})^2} dy = \frac{1}{p-1} + (1-e^{-1})^{-2} \int_1^{\infty} y^p e^{-y} dy <$$

$$< \frac{1}{p-1} + (1-e^{-1})^{-2} \int_0^{\infty} y^p e^{-y} dy = \frac{1}{p-1} + (1-e^{-1})^{-2} \Gamma(p+1)$$

für $p > 1$ beschränkt ist. Also gilt

$$\int_{a-1}^{a-\frac{1}{n}} \left\{ \int_{-1}^1 \left| \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}\left(x+\frac{u}{n}\right) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) \right| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}\left(x+\frac{u}{n}\right) du \right\}^p dx = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (17)$$

2. Sei $x \in [a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}]$, dann gilt einerseits

$$\begin{aligned} \left| \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}\left(x+\frac{u}{n}\right) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) \right| &= \left| |x-a+\frac{u}{n}|^{\alpha'} (b-x-\frac{u}{n})^{\beta'} - |x-a|^{\alpha'} (b-x)^{\beta'} \right| \leq \\ &\leq \left| (|x-a+\frac{u}{n}|^{\alpha'} - |x-a|^{\alpha'}) (b-x-\frac{u}{n})^{\beta'} \right| + |x-a|^{\alpha'} \left| (b-x-\frac{u}{n})^{\beta'} - (b-x)^{\beta'} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{u}{n} \right|^{\alpha'} (b-x-\frac{u}{n})^{\beta'} + |x-a|^{\alpha'} \left| \frac{u}{n} \right|^{\beta'} \leq n^{-\alpha'} (b-a+2)^{\beta'} + n^{-(\alpha'+\beta')} < \\ &< 2n^{-\alpha'} (b-a+2)^{\beta'}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für diese x

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}\left(x+\frac{u}{n}\right) du &= \int_{-1}^1 |x-a+\frac{u}{n}|^{-\alpha'} |b-x-\frac{u}{n}|^{-\beta'} du < \\ &< \int_{-1}^1 |x-a+\frac{u}{n}|^{-\alpha'} |b-d|^{-\beta'} du \leq (b-d)^{-\beta'} \int_{-1}^1 \left| \frac{u}{n} \right|^{-\alpha'} du = \\ &= \frac{2}{1-\alpha'} \cdot \frac{n^{\alpha'}}{(b-d)^{\beta'}}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} \left\{ \int_{-1}^1 \left| \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}\left(x+\frac{u}{n}\right) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) \right| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}\left(x+\frac{u}{n}\right) du \right\}^p dx < \frac{2}{n(1-\alpha)}^p \frac{(b-a+2)^{\beta}}{(b-d)^{\beta(p-1)}}. \quad (18)$$

3. Sei $x \in [a + \frac{1}{n}, d - \frac{1}{n}]$. Weil $\rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}$ auf $[a, d]$ monoton wächst,

haben wir :

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |\rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x)| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) du = \\ &= \int_{-1}^0 [\rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n})] \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) du + \int_0^1 [\rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x)] \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) du = \\ &= \int_0^1 \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x - \frac{u}{n}) du - \int_0^1 \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x) \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) du = \\ &= \int_0^1 [\frac{x-a}{x-a-\frac{u}{n}}]^{\alpha'} [\frac{b-x}{b-x+\frac{u}{n}}]^{\beta'} du - \int_0^1 [\frac{x-a}{x-a+\frac{u}{n}}]^{\alpha'} [\frac{b-x}{b-x-\frac{u}{n}}]^{\beta'} du < \\ &< \int_0^1 [\frac{x-a}{x-a-\frac{u}{n}}]^{\alpha'} du - \int_0^1 [\frac{x-a}{x-a+\frac{u}{n}}]^{\alpha'} du = \int_0^1 [1 - \frac{u}{n(x-a)}]^{-\alpha'} du - \int_0^1 [1 + \frac{u}{n(x-a)}]^{-\alpha'} du. \end{aligned}$$

Wenn man nun in R_1 aus der Formel (15) die Differenz $(a-x)$ durch ihren Betrag $|a-x|$ ersetzt und die Rechnung zwischen (16) und (17) beachtet, dann erkennt man wegen (16) unschwer, dass gilt :

$$\int_{a+\frac{1}{n}}^{d-\frac{1}{n}} \left[\int_{-1}^1 |\rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x)| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) du \right]^p dx = o(\frac{1}{n}). \quad (19)$$

4. Sei $x \in [d - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}]$, dann gilt :

$$\int_{-1}^1 |\rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x)| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x + \frac{u}{n}) du < \int_{-1}^1 \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(d) (x - a + \frac{u}{n})^{-\alpha'} (b - x - \frac{u}{n})^{-\beta'} du <$$

$$< \int_{-1}^1 \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(d)(d-a-\frac{2}{n})^{-\alpha'}(b-d-\frac{2}{n})^{-\beta'} du = 2 \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(d)(d-a-\frac{2}{n})^{-\alpha'}(b-d-\frac{2}{n})^{-\beta'}$$

$$\text{Also ist } \int_{d-\frac{1}{n}}^{d+\frac{1}{n}} \left(\int_{-1}^1 |\rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x)| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) du \right)^p dx <$$

$$< \frac{2^{p+1}}{n} \rho_{(*)}(d) \frac{(d-a-2)^{-\alpha(p-1)}}{(b-d-2)^{\beta(p-1)}} \quad (20)$$

5. Sei $x \in [d+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$. Wie unter 3. zeigt man

$$\int_{d+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \left(\int_{-1}^1 |\rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x)| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) du \right)^p dx = o(\frac{1}{n}) \quad (21)$$

6. Sei $x \in [b-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}]$. Wie unter 2. zeigt man

$$\int_{b-\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} \left(\int_{-1}^1 |\rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x)| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) du \right)^p dx = o(\frac{1}{n}) \quad (22)$$

7. Sei $x \in [b+\frac{1}{n}, b+1]$. Wie unter 1. zeigt man, dass gilt:

$$\int_{b+\frac{1}{n}}^{b+1} \left(\int_{-1}^1 |\rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{\frac{1}{p}}(x)| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) du \right)^p dx = o(\frac{1}{n}) \quad (23)$$

Aus den Formeln (14) und (17) bis (23) folgt sofort die Beziehung (9), falls $\alpha, \beta \in (0,1)$ sind.

Wie eine etwas einfachere aber ähnliche Betrachtung für die beiden Fälle: $\alpha=0, \beta \in (0,1)$

und $\beta=0, \alpha \in (0,1)$ zeigt, gilt (9) auch dann.

Für $\alpha=\beta=0$ ist (9) trivialerweise erfüllt. q.e.d.

Folgerung 3.3 : Sei $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $p > 1$,

$$\rho(x) := |x-a|^{\alpha(p-1)} |b-x|^{\beta(p-1)} \quad \text{für } x \in [a, b] \quad , \quad \varphi \in W_{p, \rho}^m([a, b], \rho)$$

und $\varphi(n) := \varphi_n|_{[a, b]}$. Dann gilt :

$$\|\varphi(n)\|_{W_{p, \rho}^m} \leq M \|\varphi\|_{W_{p, \rho}^m} \quad , \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi(n) - \varphi\|_{W_{p, \rho}^m} = 0 \quad .$$

Hilfssatz 3.4 : Sei $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $p > 1$,

$$\rho(x) := |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{-\beta} \quad \text{für } x \in [a-1, b+1] \quad , \quad \varphi \in L_p([a, b], \rho | [a, b]) \quad \text{und}$$

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{für } x \in [a-1, a) \cup (b, b+1] \end{cases} .$$

Dann gilt :

$$\|\varphi_n\|_{p, \rho} \leq M' \|\tilde{\varphi}\|_{p, \rho} \quad \text{für } n=1, 2, \dots \quad , \quad (24)$$

wobei M' weder von φ noch von n abhängt .

$$\text{Beweis : Wir setzen } \psi(x) := \rho^{\frac{1}{p}}(x) \varphi(x) \quad \text{für } x \in [a, b] \quad , \quad (25)$$

$$\psi_*(x) := \begin{cases} \psi(x) & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{für } x \in [a-2, a) \cup (b, b+2] \end{cases} ,$$

$$\tilde{\psi} := \psi_*|_{[a-1, b+1]}$$

$$\text{und } \rho_{(*)}(x) := |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{-\beta} \quad \text{für } x \in [a-2, b+2] .$$

Zunächst sei $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Ausserdem nehmen wir an , dass $b-a > 4$ ist . Andernfalls ersetze man in den nachfolgenden Abschätzungen die Folge $n=1, 2, 3, \dots$ durch die Folge

$$n = \left[\frac{4}{b-a} \right] + 1, \left[\frac{4}{b-a} \right] + 2, \left[\frac{4}{b-a} \right] + 3, \dots$$

$$\text{und } M' \text{ durch } \max \left\{ M', \left[\frac{4}{b-a} \right] (b-a+1)^{\alpha+\beta} \int_{a-1}^{b+1} \rho(x) dx \right\} \quad , \quad \text{wobei } \left[\frac{4}{b-a} \right]$$

die grösste ganze Zahl bezeichnet , die nicht grösser als $\frac{4}{b-a}$ ist .

Unter diesen Voraussetzungen schätzen wir $\|\varphi_n\|_{p, \rho}^p$ nach oben ab :

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_{p,p}^p &= \int_{a-1}^{b+1} \rho(x) \left| \int_{-1}^1 \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}\left(x+\frac{u}{n}\right) \psi_{**}\left(x+\frac{u}{n}\right) \omega(u) du \right|^p dx \leq \\ &\leq 2^{p-1} \int_{a-1}^{b+1} \rho(x) |I(x)|^p dx + 2^{p-1} \int_{a-1}^{b+1} \left| \int_{-1}^1 \psi_{**}\left(x+\frac{u}{n}\right) \omega(u) du \right|^p dx, \quad (26) \end{aligned}$$

$n=1,2,\dots$. Dabei wurde

$$I(x) := \int_{-1}^1 \left(\rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}\left(x+\frac{u}{n}\right) - \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x) \right) \psi_{**}\left(x+\frac{u}{n}\right) \omega(u) du \quad \text{für } x \in [a-1, b+1] \text{ und}$$

für $n=1,2,\dots$ gesetzt . Offensichtlich gilt :

$$\begin{aligned} |I(x)| &\leq \int_{-1}^1 \left| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}\left(x+\frac{u}{n}\right) - \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x) \right| \cdot \left| \psi_{**}\left(x+\frac{u}{n}\right) \right| \omega(u) du = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\left| x+\frac{u}{n}-a \right|^{\frac{\alpha}{p}} - \left| x-a \right|^{\frac{\alpha}{p}} \right) \left| b-x-\frac{u}{n} \right|^{\frac{\beta}{p}} + \left| x-a \right|^{\frac{\alpha}{p}} \left(\left| b-x-\frac{u}{n} \right|^{\frac{\beta}{p}} - \left| b-x \right|^{\frac{\beta}{p}} \right) \cdot \left| \psi_{**}\left(x+\frac{u}{n}\right) \right| \omega(u) du \\ &\leq \int_{-1}^1 \left| \frac{u}{n} \right|^{\frac{\alpha}{p}} \left| b-x-\frac{u}{n} \right|^{\frac{\beta}{p}} \left| \psi_{**}\left(x+\frac{u}{n}\right) \right| \omega(u) du + \left| x-a \right|^{\frac{\alpha}{p}} \int_{-1}^1 \left| \frac{u}{n} \right|^{\frac{\beta}{p}} \left| \psi_{**}\left(x+\frac{u}{n}\right) \right| \omega(u) du \quad (27) \end{aligned}$$

für $x \in [a-1, b+1]$ und $n=1,2,\dots$. Also ist

$$|I(x)|^p \leq 2^{p-1} I_1^p(x) + 2^{p-1} I_2^p(x), \quad (28)$$

wobei wir der Kürze halber die beiden Summanden auf der rechten Seite von (27) entsprechend ihrer Reihenfolge mit $I_1(x)$ bzw. mit $I_2(x)$ bezeichnen .

Das Integrationssegment $[a-1, b+1]$ im ersten Integral auf der rechten Seite der Ungleichung (26) wird nun durch die Punkte: $a-\frac{1}{n}$, $a+\frac{2}{n}$, $\frac{a+b}{2}$, $b-\frac{2}{n}$ und $b+\frac{1}{n}$ in sechs Teilsegmente zerlegt.

1. Für $x \in [a-1, a-\frac{1}{n}]$ gilt :

$$I_1(x) = I_2(x) = 0 \quad , \quad \text{also ist} \quad \int_{a-1}^{a-\frac{1}{n}} \rho(x) |I_1(x)|^p dx = 0 \quad . \quad (29)$$

2. Für $x \in [a-\frac{1}{n}, a+\frac{2}{n}]$ gilt :

$$\begin{aligned} I_1(x) &\leq |b-a+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}|^{\frac{\beta}{p}} \int_{-1}^1 |\frac{u}{n}|^{\frac{\alpha}{p}} |\psi_*(x+\frac{u}{n})| \omega(u) du = \\ &= |b-a+\frac{2}{n}|^{\frac{\beta}{p}} \int_{-1}^1 |\frac{u}{n}|^{\frac{\alpha}{p}} |\psi_*(x+\frac{u}{n})| \omega^{\frac{1}{p}}(u) \cdot \omega^{\frac{1}{q}}(u) du \quad . \end{aligned}$$

$$I_1^p(x) \leq |b-a+2|^{\beta} \int_{-1}^1 |\frac{u}{n}|^{\alpha} |\psi_*(x+\frac{u}{n})|^p \omega(u) du \cdot \left\{ \int_{-1}^1 \omega(u) du \right\}^{p-1} \leq$$

$$\leq |b-a+2|^{\beta} c n^{1-\alpha} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |\psi_*(x+v)|^p dv \leq \quad ,$$

(denn wegen (25) ist $\psi_* \in L_p[a-2, b+2]$.)

$$\leq |b-a+\frac{b-a}{2}|^{\beta} c n^{1-\alpha} \|\tilde{\psi}\|_p^p = |b-a|^{\beta} (\frac{3}{2})^{\beta} c n^{1-\alpha} \|\tilde{\varphi}\|_{p,p}^p \quad .$$

$$\text{Also ist : } \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{2}{n}} \rho(x) I_1^p(x) dx \leq |b-a|^{\beta} (\frac{3}{2})^{\beta} c n^{1-\alpha} \|\tilde{\varphi}\|_{p,p}^p \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{2}{n}} |x-a|^{-\alpha} (b-x)^{-\beta} dx \leq$$

$$\leq |b-a|^{\beta} (\frac{3}{2})^{\beta} c n^{1-\alpha} \|\tilde{\varphi}\|_{p,p}^p \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{2}{n}} |x-a|^{-\alpha} (b-\frac{a+b}{2})^{-\beta} dx \leq \frac{3c}{1-\alpha} \|\tilde{\varphi}\|_{p,p}^p \quad . \quad (30)$$

Für diese x gilt ausserdem :

$$\begin{aligned} I_2^p(x) &= |x-a|^\alpha \left\{ \int_{-1}^1 \left| \frac{u}{n} \right|^{\frac{\beta}{p}} |\psi_*(x+\frac{u}{n})| \omega^{\frac{1}{p}}(u) \cdot \omega^{\frac{p-1}{p}}(x) du \right\}^p \leq \\ &\leq |x-a|^\alpha \int_{-1}^1 \left| \frac{u}{n} \right|^\beta |\psi_*(x+\frac{u}{n})|^p \omega(u) du \leq \\ &\leq |x-a|^\alpha c n^{1-\beta} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |\psi_*(x+v)|^p dv \leq |x-a|^\alpha c n^{1-\beta} \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p. \quad \text{Also ist :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{2}{n}} \rho(x) I_2^p(x) dx &\leq c n^{1-\beta} \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{2}{n}} (b-x)^{-\beta} dx \leq \\ &\leq c n^{1-\beta} \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p \frac{1}{1-\beta} \left[(b-a+\frac{1}{n})^{1-\beta} - (b-a-\frac{2}{n})^{1-\beta} \right] \leq \\ &\leq c n^{1-\beta} \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{3}{n} \right)^{1-\beta} < \frac{3c}{1-\beta} \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p. \end{aligned}$$

Zusammen mit (30) ergibt sich daher :

$$\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{2}{n}} \rho(x) |I(x)|^p dx < 3 c 2^{p-1} \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} \right) \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p. \quad (31)$$

3. Für $x \in [a+\frac{2}{n}, \frac{a+b}{2}]$ gilt :

$$I_1(x) < \int_{-1}^1 \left| \frac{u}{n} \right|^{\frac{\alpha}{p}} (b-a)^{\frac{\beta}{p}} |\psi_*(x+\frac{u}{n})| \omega(u) du. \quad \text{Damit ergibt sich :}$$

$$\begin{aligned} & \left(\int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} \rho(x) |I_1(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < (b-a)^{\frac{\beta}{p}} \left(\int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} \rho(x) \left[\int_{-1}^1 \left| \frac{u}{n} \right|^{\frac{\alpha}{p}} |\psi_*(x+\frac{u}{n})| \omega(u) du \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ & = (b-a)^{\frac{\beta}{p}} \left(\int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} \left[\int_{-1}^1 |x-a|^{-\frac{\alpha}{p}} |b-x|^{-\frac{\beta}{p}} \left| \frac{u}{n} \right|^{\frac{\alpha}{p}} |\psi_*(x+\frac{u}{n})| \omega(u) du \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Jessenschen Ungleichung (vergl. [93] Seite 169) schätzen wir den letzten Ausdruck nach oben ab :

$$\begin{aligned} & < (b-a)^{\frac{\beta}{p}} \int_{-1}^1 \left[\int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} |x-a|^{-\frac{\alpha}{p}} |x-b|^{-\frac{\beta}{p}} \left| \frac{u}{n} \right|^{\frac{\alpha}{p}} |\psi_*(x+\frac{u}{n})| \omega(u) dx \right]^p du = \\ & = (b-a)^{\frac{\beta}{p}} \int_{-1}^1 \left| \frac{u}{n} \right|^{\frac{\alpha}{p}} \omega(u) \left\{ \int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} |x-a|^{-\alpha} |x-b|^{-\beta} |\psi_*(x+\frac{u}{n})|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} du < \end{aligned}$$

Wegen $|x-a| > |a+\frac{2}{n}-a| = \frac{2}{n}$ und $|b-x| > |b-\frac{a+b}{2}| = |\frac{b-a}{2}|$ können wir weiter vergrössern :

$$< \left(\frac{2}{n}\right)^{-\frac{\alpha}{p}} 2^{\frac{\beta}{p}} \int_{-1}^1 \left| \frac{u}{n} \right|^{\frac{\alpha}{p}} \omega(u) \left\{ \int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} |\psi_*(x+\frac{u}{n})|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} du <$$

$$< 2^{\frac{1}{p}} \int_{-1}^1 |u|^{\frac{\alpha}{p}} \omega(u) \|\tilde{\psi}\|_p du < 2^{\frac{1}{p}} \|\tilde{\psi}\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|\tilde{\varphi}\|_{p,p}.$$

$$\text{Also ist : } \int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} \rho(x) |I_1(x)|^p dx < 2 \|\tilde{\varphi}\|_{p,p}^p. \quad (32)$$

Auf Grund der Hölderschen Ungleichung gilt für diese $x \in [a+\frac{2}{n}, \frac{a+b}{2}]$ ausserdem :

$$I_2^p(x) = |x-a|^\alpha \left\{ \int_{-1}^1 \left| \frac{u}{n} \right|^{\frac{\beta}{p}} |\psi_*(x+\frac{u}{n})| \omega^{\frac{1}{p}}(u) \cdot \omega^{\frac{p-1}{p}}(u) du \right\}^p \leq$$

$$\leq |x-a|^\alpha \int_{-1}^1 \left| \frac{u}{n} \right|^\beta |\psi_*(x+\frac{u}{n})|^p \omega(u) du = 1 \leq$$

$$\leq |x-a|^\alpha n^{1-\beta} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |\psi_*(x+v)|^p \omega(nv) dv \quad . \quad \text{Deshalb ergibt sich:}$$

$$\int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} \rho(x) |I_2(x)|^p dx \leq n^{1-\beta} \int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} |b-x|^{-\beta} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |\psi_*(x+v)|^p \omega(nv) dv dx \leq$$

$$\leq n^{1-\beta} |b-\frac{a+b}{2}|^{-\beta} \int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |\psi_*(x+v)|^p \omega(nv) dv dx \quad .$$

Die Voraussetzungen des Satzes von Fubini sind hier offensichtlich erfüllt und wir vertauschen die Reihenfolge der beiden Integrationen .
Somit ist :

$$\int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} \rho(x) |I_2(x)|^p dx \leq n^{1-\beta} (b-a)^{-\beta} 2^\beta \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \omega(nv) \int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} |\psi_*(x+v)|^p dx dv <$$

$$< n^{1-\beta} 4^{-\beta} 2^\beta \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \omega(nv) \|\tilde{\psi}\|_p^p dv = (2n)^{-\beta} \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p \quad .$$

Zusammen mit (32) erhalten wir daher :

$$\int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} \rho(x) |I(x)|^p dx < (2 + n^{-\beta}) 2^{p-1} \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p \quad (33)$$

4. Sei $x \in [\frac{a+b}{2}, b-\frac{2}{n}]$:

Wir setzen $\hat{\varphi}_*(y) := \psi_*(a+b-y)$ für $y \in [a-2, b+2]$,

$\hat{\varphi}(y) := \tilde{\varphi}(a+b-y)$ für $y \in [a-1, b+1]$ und

$\hat{\rho}(y) := |y-a|^{-\hat{\alpha}} |b-y|^{-\hat{\beta}}$ für $y \in [a-1, b+1]$ mit $\hat{\alpha} := \beta$
und $\hat{\beta} := \alpha$.

Offensichtlich gilt $\|\hat{\varphi}\|_{p,\hat{\rho}} = \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}$ und nach (33) auch

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\frac{2}{n}} \rho(x) |I(x)|^p dx &= \int_{a+\frac{2}{n}}^{\frac{a+b}{2}} \hat{\rho}(y) \left| \int_{-1}^1 \{ \hat{\rho}^{-\frac{1}{p}}(y+\frac{u}{n}) - \hat{\rho}^{-\frac{1}{p}}(y) \} \hat{\varphi}_*(x+\frac{u}{n}) \omega(u) du \right|^p dy \\ &< 2^{p-1} (2 + n^{-\beta}) \|\hat{\varphi}\|_{p,\hat{\rho}}^p = 2^{p-1} (2 + n^{-\alpha}) \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p \quad (34) \end{aligned}$$

5. Ebenso gilt auch (vergl. Formel (31)) :

$$\begin{aligned} \int_{b-\frac{2}{n}}^{b+\frac{1}{n}} \rho(x) |I(x)|^p dx &< 3c 2^{p-1} \left(\frac{1}{1-\hat{\alpha}} + \frac{1}{1-\hat{\beta}} \right) \|\hat{\varphi}\|_{p,\hat{\rho}}^p = \\ &= 3c 2^{p-1} \left(\frac{1}{1-\hat{\alpha}} + \frac{1}{1-\hat{\beta}} \right) \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p \quad (35) \end{aligned}$$

6. Der Formel (29) entsprechend gilt :

$$\int_{b+\frac{1}{n}}^{b+1} \rho(x) |I(x)|^p dx = 0 \quad (36)$$

7. Auf das innere Integral im letzten Summanden, der auf der rechten Seite der Ungleichung (26) steht, wenden wir nun die Hölder'sche Ungleichung an und erhalten:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 \psi_{**}(x+\frac{u}{n}) \omega(u) du \right|^p &\leq \left\{ \int_{-1}^1 |\psi_{**}(x+\frac{u}{n})| \omega^{\frac{1}{p}}(u) \cdot \omega^{\frac{p-1}{p}}(u) du \right\}^p \leq \\ &\leq \int_{-1}^1 |\psi_{**}(x+\frac{u}{n})|^p \omega(u) du \cdot 1^{p-1} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2^{p-1} \int_{a-1}^{b+1} \left| \int_{-1}^1 \psi_{**}(x+\frac{u}{n}) \omega(u) du \right|^p dx &\leq 2^{p-1} \int_{a-1}^{b+1} \int_{-1}^1 |\psi_{**}(x+\frac{u}{n})|^p \omega(u) du dx = \\ = 2^{p-1} \int_{-1}^1 \omega(u) \int_{a-1}^{b+1} |\psi_{**}(x+\frac{u}{n})|^p dx du &\leq 2^{p-1} \int_{-1}^1 \omega(u) \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p du = 2^{p-1} \|\tilde{\varphi}\|_{p,\rho}^p. \quad (37) \end{aligned}$$

Aus den Formeln (26), (29), (31), (33) bis (37) folgt sofort die Ungleichung (24), wobei

$$M' := 2^{\frac{p-1}{p}} \{ 2^p \beta c (\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta}) + 2^{p-1} (4+n^{-\alpha}+n^{-\beta}) + 1 \}^{\frac{1}{p}}$$

gesetzt worden ist.

Die Untersuchung für die bisher ausgeschlossenen drei Fälle $\alpha = 0$, $\beta \in (0,1)$
 $\beta = 0$, $\alpha \in (0,1)$ und
 $\alpha = \beta = 0$ (trivial) führt nach einfacherer Rechnung ebenfalls zur Gleichung (24) mit einer etwas kleineren Konstanten M'' . q.e.d.

Hilfssatz 3.5: Es sei $p > 1$, $\alpha, \beta \in [0,1)$

$\rho(x) := |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{-\beta}$ für $x \in [a-1, b+1]$ und $\varphi \in W_p^m([a,b], \rho | [a,b])$.

Dann gilt:

$$\|\varphi_n\|_{W_{p,\rho}^m} \leq M' \|\tilde{\varphi}\|_{W_{p,\rho}^m}, \quad n=1,2,\dots \quad (38)$$

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \tilde{\varphi}\|_{W_{p,\rho}^m} = 0. \quad (39)$$

Dabei ist

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{für } x \in [a-1, a) \cup (b, b+1] \end{cases}$$

gesetzt. M' hängt weder von φ noch von n ab.

Beweis: Formel (38) folgt sofort aus (2) und Hilfssatz 3.4.

Aus (2) folgt ausserdem, dass für den Beweis der Formel (39) nur noch zu zeigen ist, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| \varphi_n - \tilde{\varphi} \|_{p, \rho} = 0 \quad \text{für bel. } \varphi \in L_p([a, b], \rho|_{[a, b]})$$

Der Beweis geht nun wörtlich so weiter wie der von Hilfssatz 3.2, nur dass die Beziehung (9) diesmal für $\rho(x) := |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{-\beta}$, $x \in [a-1, b+1]$, gezeigt werden muss.

$$\begin{aligned} \| \rho^{\frac{1}{p}} g_n - h_n \|_p^p &= \int_{a-1}^{b+1} \rho(x) \left| \int_{-1}^1 \left[\rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x) \right] h_{**}(x+\frac{u}{n}) \omega(u) du \right|^p dx \leq \\ &\leq \|h\|_C^p [a, b] \int_{a-1}^{b+1} \rho(x) \left[\int_{-1}^1 \left| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x) \right| \omega(u) du \right]^p dx \leq \\ &\leq \|h\|_C^p [a, b] \int_{a-1}^{b+1} \rho(x) \int_{-1}^1 \left| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x) \right|^p \omega(u) du \cdot \int_{-1}^1 \omega(u) du^{p-1} dx = \\ &= \|h\|_C^p [a, b] \int_{a-1}^{b+1} \rho(x) \int_{-1}^1 \left| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x) \right|^p \omega(u) du dx. \end{aligned}$$

Wir schätzen jetzt den Integranden des inneren Integrals für $\alpha \neq \beta$ nach oben ab.

$$\begin{aligned} \left| \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{-\frac{1}{p}}(x) \right| &= \left| |x-a+\frac{u}{n}|^{\frac{\alpha}{p}} |b-x-\frac{u}{n}|^{\frac{\beta}{p}} - |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} |b-x|^{\frac{\beta}{p}} \right| = \\ &= \left| \left(|x-a+\frac{u}{n}|^{\frac{\alpha}{p}} - |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} \right) |b-x-\frac{u}{n}|^{\frac{\beta}{p}} + |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} \left(|b-x-\frac{u}{n}|^{\frac{\beta}{p}} - |b-x|^{\frac{\beta}{p}} \right) \right| \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{\alpha}{p}} |b-a+2|^{\frac{\beta}{p}} + |b-a+1|^{\frac{\alpha}{p}} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{\beta}{p}}. \end{aligned}$$

$$|\rho_{(*)}^{(-\frac{1}{p})}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{(-\frac{1}{p})}(x)|^p \leq 2^{p-1}(b-a+2)\beta n^{-\alpha} + 2^{p-1}(b-a+1)\alpha n^{-\beta}$$

für $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$. Falls $\alpha=0$ oder $\beta=0$ ist, fällt der erste bzw. letzte Summand auf der rechten Seite der letzten Ungleichung weg.

Für $\alpha=\beta=0$ gilt trivialerweise $|\rho_{(*)}^{(-\frac{1}{p})}(x+\frac{u}{n}) - \rho_{(*)}^{(-\frac{1}{p})}(x)|^p = 0$.

Damit ergibt sich schliesslich für $\alpha \neq 0 \neq \beta$:

$$\|\rho^{\frac{1}{p}}g_n - h_n\|_p^p \leq \|h\|_{C[a,b]}^p 2^{p-1} (|b-a+2|\beta n^{-\alpha} + |b-a+1|\alpha n^{-\beta}) \int_{a-1}^{b+1} \rho(x) dx,$$

woraus wegen $\rho \in L[a-1, b+1]$ sofort (9) folgt.

Offensichtlich gilt (9) auch für die übrigen Fälle. q.e.d.

Folgerung 3.6: Es sei $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $p > 1$, $\rho(x) := |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{-\beta}$ für $x \in [a, b]$ und es sei $\varphi \in W_{p, \rho}^m([a, b], \rho)$. Dann gilt:

$$\|\varphi(n)\|_{W_{p, \rho}^m} \leq M' \|\varphi\|_{W_{p, \rho}^m}, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi(n) - \varphi\|_{W_{p, \rho}^m} = 0.$$

Dabei ist $\varphi(n) := \varphi_n|_{[a, b]}$ gesetzt worden.

M' hängt weder von φ noch von n ab.

Folgerung 3.7: Die Hilfssätze 3.2 und 3.4 und die Folgerungen 3.3 und 3.6 behalten ihre Gültigkeit, wenn man das Segment $[a, b]$ durch eine einfache, rektifizierbare, nicht geschlossene Kurve $\Gamma = \overset{\curvearrowright}{c'} \overset{\curvearrowright}{c''}$ und das Segment $[a-1, b+1]$ durch eine einfache, rektifizierbare, nicht geschlossene Kurve $\tilde{\Gamma} = \overset{\curvearrowright}{c'} \overset{\curvearrowright}{c''}$ mit $\tilde{\Gamma} \supset \overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ (8) ersetzt, so dass das Mass der beiden Teilkurven $\overset{\curvearrowright}{c'} \overset{\curvearrowright}{c'}$ und $\overset{\curvearrowright}{c''} \overset{\curvearrowright}{c''}$ der Menge $\tilde{\Gamma} \setminus \overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ jeweils gleich 1 ist. Dabei seien zu c' und c'' je eine Zahl γ' mit $-1 < \gamma' < p-1$ bzw. γ'' mit $-1 < \gamma'' < p-1$ gegeben. Das Gewicht ρ werde dann definiert durch $\rho(t) := |t-c'|^{\gamma'} |t-c''|^{\gamma''}$, $t \in \tilde{\Gamma}$.

Folgerung 3.8: Die Folgerungen 3.3 und 3.6 behalten ihre Gültigkeit, wenn man das Segment $[a, b]$ durch ein System Γ von endlich vielen, paarweise disjunkten, einfachen und rektifizierbaren Kurven ersetzt.

(8) $\overset{\circ}{\Gamma}$ bezeichne den offenen Kern (bezüglich der von der Bogenlänge s auf Γ erzeugten Kurventopologie) von Γ , d.h. die Kurve Γ ohne ihre beiden Endpunkte c' und c'' , also $\overset{\circ}{\Gamma} := \Gamma \setminus \{c', c''\}$.

Zu dem System Γ mögen r nicht geschlossene Kurven $\Gamma_k := \overset{\curvearrowright}{c_k} c_{r+k}$, $k=1,2,\dots,r$ und l geschlossene Kurven Γ_k , $k=r+1,r+2,\dots,r+l$ gehören. Ferner sei zu jedem Endpunkt c_k ($k=1,2,\dots,2r$) und zu jedem von s beliebigen inneren Punkten c_k ($k=2r+1,2r+2,\dots,2r+s$) der Kurven aus Γ eine Zahl γ_k mit $-1 < \gamma_k < p-1$ ($k=1,2,\dots,2r+s$) gegeben. p werde dann definiert ⁵⁾ durch:

$$\rho(t) := \prod_{k=1}^{2r+s} |t - c_k|^{\gamma_k}, \quad t \in \Gamma.$$

Definition 3.9: Γ und ρ sei wie in Folgerung 3.8. Eine Funktion auf Γ heisst finit, wenn sie ausserhalb der Kurven eines Systems Γ' von Teilkurven von Kurven des Systems Γ , wobei $\overline{\Gamma'} \subset \overset{\circ}{\Gamma}$ gilt, gleich Null ist. Dabei kann Γ' für verschiedene Funktionen verschieden sein. Mit $\dot{C}^m(\Gamma)$ bezeichnen wir die Menge aller finiten, stetigen und m -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Γ . Mit $\dot{C}^\infty(\Gamma)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen φ , für die gilt: $\varphi \in \dot{C}^m(\Gamma)$ für $m=1,2,\dots$. (vergl. [13]) ✓

Folgerung 3.9.1: Die Menge $\dot{C}^\infty(\Gamma)$ liegt dicht im Banachraum $L_p(\Gamma, \rho)$ (vergl. [13] Nr.113 Seite 305) ✓

Beweis: Mit Γ_δ bezeichnen wir die Menge aller derjenigen Punkte von Γ , deren Abstand von $\partial\Gamma$ in der Bogenlänge nicht kleiner als $\delta > 0$ ist^{*)}. Für jedes $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$ setzen wir

$$\varphi^{(\delta)}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } t \in \Gamma_\delta \\ 0 & \text{für } t \in \Gamma \setminus \Gamma_\delta \end{cases}.$$

Offenbar liegt die Menge der Funktionen $\varphi^{(\delta)}$ dicht im Raum $L_p(\Gamma, \rho)$, denn für $\delta \rightarrow 0$ gilt:

$$\|\varphi^{(\delta)} - \varphi\|_{p,\rho}^p = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\delta} \rho(t) |\varphi(t)|^p |dt| \rightarrow 0.$$

Zu $\varphi^{(\delta)}$ konstruieren wir nun die Mittelfunktionen $\varphi_{(n)}^{(\delta)}$ für $n \geq \frac{2}{\delta}$.

Nach Folgerung 3.8 konvergiert die Folge der $\varphi_{(n)}^{(\delta)}$ in der Norm des Raumes $L_p(\Gamma, \rho)$ gegen $\varphi^{(\delta)}$. Die $\varphi_{(n)}^{(\delta)}$ sind aber finite Funktionen aus $\dot{C}^\infty(\Gamma)$. Damit ist alles gezeigt.

⁵⁾ Siehe Fussnote auf Seite 5

^{*)} $\partial\Gamma := \Gamma \cap \overset{\circ}{\Gamma}$

4. Abschnitt

KONSTRUKTION DER HERMITESCHEN INTERPOLATIONSPOLYNOME :

Es sei f eine auf dem Segment $[a, b]$ definierte Funktion, die in einer gewissen Umgebung der paarweise verschiedenen Punkte $x_i \in [a, b]$, $i=1, 2, \dots, r$, Ableitungen bis zur Ordnung m_i einschliesslich besitzt. Das Hermitesche Interpolationspolynom $\mathcal{G}f$,

$$(\mathcal{G}f)(x) := \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_i) (x-x_i)^j g_{ij}(x) ,$$

$$\text{wobei } g_{ij}(x) := h_i(x) \sum_{k=0}^{m_i-1-j} \frac{1}{k!} \left[\frac{1}{h_i(x)} \right]_{x=x_i}^{(k)} (x-x_i)^k \quad (1)$$

$$\text{und } h_i(x) := \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^r (x-x_l)^{m_l} \text{ gesetzt wurde ,} \quad x \in [a, b]$$

ist das (eindeutig bestimmte) Polynom vom Grade $\sigma := \sum_{i=1}^r m_i - 1$, das die Bedingungen

$$(\mathcal{G}f)^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) , \quad j=0, 1, \dots, m_i-1 , \quad i=1, \dots, r, \quad (2)$$

erfüllt. Wir werden weiter unten zeigen, dass für das spezielle Gewicht ρ ,

$$\rho(x) := |x-a|^\alpha \cdot |b-x|^\beta , \quad x \in [a, b], -1 < \alpha < p-1, -1 < \beta < p-1, p > 1,$$

die durch

$$F(x) := \frac{f(x) - (\mathcal{G}f)(x)}{\prod_{i=1}^r (x-x_i)^{m_i}} , \quad x \in [a, b] \setminus \{x_i, i=1, \dots, r\} ,$$

$$\text{und } F(x_i) := \lim_{x \rightarrow x_i} F(x) , \quad i=1, \dots, r ,$$

auf $[a, b]$ definierte Funktion F im Raume $W_p^{n-m}([a, b], \rho)$ enthalten ist, falls $f \in W_p^n([a, b], \rho)$, wobei $m := \max \{m_i, i=1, \dots, r\}$ ist. Als Vorbereitung dazu benötigen wir den folgenden Hilfssatz 4.1.

Hilfssatz 4.1 (vergl. [1] Hilfss. 4.3 und Hilfss. 4.4) :

Sei $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $p > 1$, $\rho(x) := |x-a|^{\alpha(p-1)} |b-x|^{\beta(p-1)}$ für $x \in [a, b]$,

m und n natürliche Zahlen mit $m \leq n$, weiter sei $f \in W_2^n([a, b], \rho)$,

$x_0 \in [a, b]$ und

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für } k=0, 1, \dots, m-1 .$$

Dann liegt die Funktion φ ,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m} & \text{für } x \in [a, b] \setminus \{x_0\} \\ \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} & \text{für } x = x_0 \end{cases} ,$$

im Raume $W_p^{n-m}([a, b], \rho)$ und es gilt

$$\|\varphi\|_{W_p^{n-m}, \rho} \leq \left(\frac{q}{\gamma'}\right)^m \|f\|_{W_p^n, \rho} , \quad (3)$$

wobei $\gamma' := 1 - \max\{\alpha, \beta\}$ und $q := \frac{p}{p-1}$ gesetzt worden ist .

Beweis : (Durch vollständige Induktion nach m)

1. Sei $m=1$. Wir beweisen die Formel (3) für $m=1$. Durch partielle Integration überzeugt man sich leicht davon , dass für $k=0, 1, \dots, n-1$ gilt :

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \left(\frac{y-x_0}{x-x_0}\right)^k f^{(k+1)}(y) dy , \quad x \in [a, b] .$$

Wir formen diesen Ausdruck für $\varphi^{(k)}(x)$ noch etwas um und schätzen ihn dann mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung nach oben ab .

$$\varphi^{(k)}(x) := \int_0^1 u^k f^{(k+1)}(x_0 + [x-x_0]u) du \quad (4)$$

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq \int_0^1 |f^{(k+1)}(x_0 + [x-x_0]u)| \rho^{\frac{1}{p}}(x_0 + [x-x_0]u) u^{\frac{\gamma'}{pq}} .$$

$$\cdot \rho^{-\frac{1}{p}}(x_0 + [x-x_0]u) u^{k - \frac{\gamma'}{pq} + 1}$$

$$|\varphi^{(k)}(x)|^p \leq \int_0^1 |f^{(k+1)}(x_0 + [x-x_0]u)|^p \rho(x_0 + [x-x_0]u) u^{\frac{\gamma'}{q}} du \times \\ \times \left(\int_0^1 \rho^{\frac{q}{p}}(x_0 + [x-x_0]u) u^{kq - \frac{\gamma'}{p}} du \right)^{p-1} \quad (5)$$

Wir werden nun den letzten Faktor auf der rechten Seite von (5) majorisieren.

1.1. Sei $x_0 \in (a, b)$:

1.1.1. Für $x \in [a, x_0]$ gilt einerseits

$$(x_0 - a + [x - x_0]u)^\alpha \geq (x_0 - a + [x - x_0] \cdot 1)^\alpha = (x - a)^\alpha$$

und wegen $(b - x_0)(1 - u) + (b - x)u \geq (b - x)u$ gilt andererseits

$$(b - x_0 - [x - x_0]u)^\beta \geq (b - x)^\beta u^\beta.$$

1.1.2. Für $x \in [x_0, b]$ gilt entsprechend

$$(b - x_0 - [x - x_0]u)^\beta \geq (b - x_0 - [x - x_0] \cdot 1)^\beta = (b - x)^\beta$$

und wegen $(x_0 - a)(1 - u) + (x - a)u \geq (x - a)u$ gilt

$$(x_0 - a + [x - x_0]u)^\alpha \geq (x - a)^\alpha u^\alpha.$$

Falls $x_0 \in (a, b)$ ist, gilt also stets :

$$\rho^{\frac{q}{p}}(x_0 + [x - x_0]u) = (x_0 - a + [x - x_0]u)^\alpha (b - x_0 - [x - x_0]u)^\beta \geq \\ \geq (x - a)^\alpha (b - x)^\beta u^{1 - \gamma'}. \quad \text{Also ist}$$

$$\left(\int_0^1 \rho^{\frac{q}{p}}(x_0 + [x - x_0]u) u^{kq - \frac{\gamma'}{p}} du \right)^{p-1} \leq$$

$$\leq (x - a)^{-\alpha(p-1)} (b - x)^{-\beta(p-1)} \left(\int_0^1 u^{kq - \frac{\gamma'}{p} + \gamma' - 1} du \right)^{p-1} =$$

$$= (x - a)^{-\alpha(p-1)} (b - x)^{-\beta(p-1)} (kq + \frac{\gamma'}{q})^{1-p}. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Aus (5) und (6) folgt } \|\varphi^{(k)}\|_{p,p}^p &= \int_a^b \rho(x) |\varphi^{(k)}(x)|^p dx \leq \\ &\leq (kq + \frac{\gamma'}{q})^{1-p} \int_a^b \int_0^1 |f^{(k+1)}(x_0 + [x-x_0]u)|^p \rho(x_0 + [x-x_0]u) u^{\frac{\gamma'}{q}} du dx = \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Fubini kann die Reihenfolge der Integrationen geändert werden .

$$\begin{aligned} &= (kq + \frac{\gamma'}{q})^{1-p} \int_0^1 \int_a^b |f^{(k+1)}(x_0 + [x-x_0]u)|^p \rho(x_0 + [x-x_0]u) u^{\frac{\gamma'}{q}} du dx = \\ &= (kq + \frac{\gamma'}{q})^{1-p} \int_0^1 u^{\frac{\gamma'}{q}-1} \int_{x_0+[a-x_0]u}^{x_0+[b-x_0]u} |f^{(k+1)}(y)|^p \rho(y) dy du < \\ &< (kq + \frac{\gamma'}{q})^{1-p} \int_0^1 u^{\frac{\gamma'}{q}-1} \int_a^b |f^{(k+1)}(y)|^p \rho(y) dy du = \\ &= \frac{q}{\gamma'} (kq + \frac{\gamma'}{q})^{1-p} \|f^{(k+1)}\|_{2,p}^p \quad \text{für } k=0,1,\dots,n-1 \quad (7) \end{aligned}$$

1.2. Sei $x_0=a$, dann gilt wie unter 1.1.2.

$$\rho^{\frac{q}{p}}(a+[x-a]u) \geq (x-a)^{\alpha} u^{\alpha} (b-x)^{\beta} \geq (x-a)^{\alpha} (b-x)^{\beta} u^{1-\gamma'}$$

1.3. Sei $x_0=b$, dann gilt wie unter 1.1.1.1.

$$\rho^{\frac{q}{p}}(b-[x-b]u) \geq (x-a)^{\alpha} (b-x)^{\beta} u^{\beta} \geq (x-a)^{\alpha} (b-x)^{\beta} u^{1-\gamma'}$$

Die Rechnung führt also in allen drei Fällen (1.1. bis 1.3.) wegen (6) zum gleichen Ergebnis (7) .

Aus der Beziehung (7) folgt unter Beachtung der Ungleichungen

$$\frac{q}{\gamma'} (kq + \frac{\gamma'}{q})^{1-p} \leq (\frac{q}{\gamma'})^p \quad \text{für } k=0,1,\dots,n-1$$

sofort die Formel (3) für $m=1$ und , dass $\varphi \in W_p^{n-1}([a,b], \rho)$ ist .
Für $m=1$ haben wir damit alles gezeigt .

2. Angenommen , unsere Behauptung gelte für eine natürliche Zahl $(m-1)$ mit $m-1 < n$. Wir haben dann zu zeigen , dass unsere Behauptung auch für die Zahl m wahr ist .

Es sei also $\psi \in W_p^{n-(m-1)}([a,b], \rho)$ mit $\psi(x) := \frac{f(x)}{(x-x_0)^{m-1}}$ und

$$\|\psi\|_{W_{p,\rho}^{n-(m-1)}} \leq \left(\frac{q}{\gamma}\right)^{m-1} \|f\|_{W_{p,\rho}^n} \quad (8)$$

Da offenbar $\psi(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^{m-1}} = \frac{f^{(m-1)}(x_0)}{(m-1)!} = 0$ und

$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{x-x_0}$ ist , so ergibt sich auf Grund des unter 1. Bewiesenen , dass $\varphi \in W_p^{n-m}([a,b], \rho)$ und

$$\|\varphi\|_{W_{p,\rho}^{n-(m-1)-1}} \leq \left(\frac{q}{\gamma}\right) \|\psi\|_{W_{p,\rho}^{n-(m-1)}} \quad (9)$$

gilt . Aus (8) und (9) folgt (3) . q.e.d.

Hilfssatz 4.2 : Sei $\alpha, \beta \in [0,1)$, $p > 1$, $\rho(x) := |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{-\beta}$ für $x \in [a,b]$, m und n natürliche Zahlen mit $m \leq n$,
 $f \in W_p^n([a,b], \rho)$, $x_0 \in [a,b]$ und $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k=0,1,\dots,m-1$.
Dann liegt die Funktion φ ,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m} & \text{für } x \in [a,b] \setminus \{x_0\} \\ \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} & \text{für } x = x_0 \end{cases} ,$$

im Raume $W_p^{n-m}([a,b], \rho)$ und es gilt

$$\|\varphi\|_{W_{p,\rho}^{n-m}} \leq M \|f\|_{W_{p,\rho}^n} \quad (10)$$

Beweis (wieder durch vollständige Induktion nach m) :

1. Sei $m=1$. Wie am Anfang des Beweises für den Hilfssatz 4.1 schreiben wir (nach (4)) wieder :

$$\varphi^{(k)}(x) = \int_0^1 u^k f^{(k+1)}(x_0 + [x-x_0]u) du \quad x \in [a,b] \quad , \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Wir setzen nun $g_k(y) := \frac{1}{p} f^{(k+1)}(y)$, $y \in [a, b]$, $k=0, 1, \dots, n-1$ und bemerken, dass $g_k \in L_p[a, b]$ mit $\|g_k\|_p = \|f^{(k+1)}\|_{p, \rho}$ ist.

1.1. Wir betrachten zunächst den Fall $x_0 = a$.

1.1.1. Ausserdem sei $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in [0, 1)$ und $k=0, 1, \dots, n-1$ oder es sei $\alpha=0$, $\beta \in [0, 1)$ und $k=1, 2, \dots, n-1$ vorausgesetzt.

$$\text{dann gilt: } \varphi^{(k)}(x) = \int_0^1 u^k f^{(k+1)}(a+[x-a]u) du =$$

$$= \int_0^1 u^k |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} u^{\frac{\alpha}{p}} (b-a-[x-a]u)^{\frac{\beta}{p}} g_k(a+[x-a]u) du.$$

1.1.1.1. Für $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ gilt nun weiter

$$|\varphi^{(k)}(x)|^p \leq (x-a)^\alpha \left\{ \int_0^1 u^{k+\frac{\alpha}{p}} (b-a-[x-a] \cdot 0)^{\frac{\beta}{p}} |g_k(a+[x-a]u)|^p du \right\}^p \leq$$

$$\leq (x-a)^\alpha (b-a)^\beta \int_0^1 u^{kp+\alpha} |g_k(a+[x-a]u)|^p du. \quad \text{Also haben wir:}$$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \rho(x) |\varphi^{(k)}(x)|^p dx \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^{-\alpha} (b-x)^{-\beta} \cdot (x-a)^\alpha (b-a)^\beta \times$$

$$\times \int_0^1 u^{kp+\alpha} |g_k(a+[x-a]u)|^p du dx \leq$$

$$\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-\frac{a+b}{2})^{-\beta} (b-a)^\beta \int_0^1 u^{kp+\alpha} |g_k(a+[x-a]u)|^p du dx =$$

Nach dem Satz von Fubini gilt nun weiter:

$$\begin{aligned}
 &= 2^\beta \int_0^1 u^{kp+\alpha} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |g_k(a+[x-a]u)|^p dx du = \\
 &= 2^\beta \int_0^1 u^{kp+\alpha-1} \int_a^{\frac{a+b}{2}u} |g_k(y)|^p dy du \leq 2^\beta \int_0^1 u^{kp+\alpha-1} \|g_k\|_p^p du = \\
 &= \frac{2^\beta}{kp+\alpha} \|g_k\|_p^p = \frac{2^\beta}{kp+\alpha} \|r^{(k+1)}\|_{p,\rho}^p. \quad (11)
 \end{aligned}$$

1.1.1.2. Für $x \in [\frac{a+b}{2}, b]$ gilt andererseits

$$\begin{aligned}
 |\varphi^{(k)}(x)|^p &\leq (x-a)^\alpha \int_0^1 u^{\frac{k+\alpha}{p}} (b-a-[x-a]\cdot 0)^{\frac{\beta}{p}} |g_k(a+[x-a]u)|^p du \leq \\
 &\leq |x-a|^\alpha (b-a)^\beta \int_0^1 |g_k(a+[x-a]u)|^p du = \\
 &= |x-a|^\alpha (b-a)^\beta \cdot \frac{1}{x-a} \int_a^x |g_k(y)|^p dy \leq |x-a|^{\alpha-1} (b-a)^\beta \|g_k\|_p^p.
 \end{aligned}$$

Also haben wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{a+b}{2}}^b \rho(x) |\varphi^{(k)}(x)|^p dx &\leq (b-a)^\beta \|g_k\|_p^p \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(b-x)^{-\beta}}{|x-a|} dx \leq \\
 &\leq (b-a)^\beta \|g_k\|_p^p \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left| \frac{a+b}{2} - a \right|^{-1} (b-x)^{-\beta} dx =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2^\beta}{1-\beta} \|\varepsilon_k\|_p^p = \frac{2^\beta}{1-\beta} \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho}^p \quad (12)$$

1.1.2. Nun sei $\alpha=0$, $\beta \in [0,1)$ und $k=0$ vorausgesetzt, dann gilt:

$$\varphi(x) = \int_0^1 f'(a+[x-a]u) du = \int_0^1 |b-a-[x-a]u|^{\frac{\beta}{p}} \varepsilon_0(a+[x-a]u) du$$

1.1.2.1. Für $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ gilt weiter

$$|\varphi(x)|^p \leq (b-a)^\beta \left| \int_0^1 \varepsilon_0(a+[x-a]u) du \right|^p$$

Also haben wir:

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \rho(x) |\varphi(x)|^p dx &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-x)^{-\beta} (b-a)^\beta \left| \int_0^1 \varepsilon_0(a+[x-a]u) du \right|^p dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-\frac{a+b}{2})^{-\beta} (b-a)^\beta \left| \int_0^1 \varepsilon_0(a+[x-a]u) du \right|^p dx = \\ &= 2^\beta \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left| \int_0^1 \varepsilon_0(a+[x-a]u) du \right|^p dx = 2^\beta \sup_{z>a} \int_z^{\frac{a+b}{2}} \left| \int_0^1 \varepsilon_0(a+[x-a]u) du \right|^p dx \\ &= 2^\beta \sup_{z>a} \int_z^{\frac{a+b}{2}} \left| \frac{1}{x-a} \int_a^x \varepsilon_0(v) dv \right|^p dx \leq \\ &\leq 2^\beta \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left\{ \frac{1}{x-a} \int_z^x |\varepsilon_0(v)| dv \right\}^p dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2^\beta \int_a^{\frac{a+b}{2}} \sup_{a < z < x} \left\{ \frac{1}{x-z} \int_z^x |g_0(v)|^p dv \right\}^p dx \leq$$

Nach Hardy/Littlewood (siehe [28] §21 Korollar(21.77)(1) für $p > 1$) können wir weiter nach oben abschätzen durch :

$$\begin{aligned} &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p 2^\beta \int_a^{\frac{a+b}{2}} |g_0(v)|^p dv < 2^\beta \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b |g_0(v)|^p dv = \\ &= 2^\beta \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f'\|_{p,p}^p \end{aligned} \quad (13)$$

1.1.2.2. Für $x \in [\frac{a+b}{2}, b]$ gilt andererseits

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^p &\leq (b-a-[x-a] \cdot 0)^\beta \left| \int_0^1 g_0(a+[x-a]u) du \right|^p \leq \\ &\leq \frac{(b-a)^\beta}{x-a} \int_a^x |g_0(v)|^p dv \quad . \quad \text{Also haben wir :} \\ \int_{\frac{a+b}{2}}^b \rho(x) |\varphi(x)|^p dx &\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)^{-\beta} \frac{(b-a)^\beta}{x-a} \int_a^x |g_0(v)|^p dv dx \leq \\ &\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)^{-\beta} \cdot 2 \cdot (b-a)^{\beta-1} \|g_0\|_p^p dx = \frac{2^\beta}{1-\beta} \|g_0\|_p^p = \\ &= \frac{2^\beta}{1-\beta} \|f'\|_{p,p}^p \end{aligned} \quad (14)$$

Damit ergibt sich für $x_0=a$, wenn man die Formeln

(11) , (12) , (13) und (14) zusammenfasst :

$$\|\varphi^{(k)}\|_{p,p}^p \leq 2^\beta \cdot \begin{cases} \left(\frac{1}{\alpha+kp} + \frac{1}{1-\beta}\right) \\ \left(\frac{p}{p-\beta}\right)^p + \frac{1}{1-\beta} \end{cases} \cdot \|\varphi^{(k+1)}\|_{p,p}^p \quad \text{für } \alpha+kp \begin{cases} > 0 \\ = 0 \end{cases} \quad (15)$$

und für $k=0,1,\dots,n-1$, falls $x_0=a$ ist.

1.2. Nun werde der Fall $x_0 \in (a,b)$ betrachtet.

1.2.1. Ausserdem setzen wir $\alpha, \beta \in (0,1)$ voraus und schätzen ab:

$$\begin{aligned} & \left| \rho^{-\frac{1}{p}}(x_0 + [x-x_0]u) - \rho^{-\frac{1}{p}}(x) \right| = \\ & = \left| |x_0 + [x-x_0]u - a|^{\frac{\alpha}{p}} \cdot |b-x_0 - [x-x_0]u|^{\frac{\beta}{p}} - |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} \cdot |b-x|^{\frac{\beta}{p}} \right| \leq \\ & \leq \left| \left[|x-a + (x_0-x)(1-u)|^{\frac{\alpha}{p}} - |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} \right] |b-x_0 - [x-x_0]u|^{\frac{\beta}{p}} \right| + \\ & + |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} \left| \left[|b-x + [x-x_0](1-u)|^{\frac{\beta}{p}} - |b-x|^{\frac{\beta}{p}} \right] \right| \leq \\ & \leq |x-x_0|^{\frac{\alpha}{p}} |1-u|^{\frac{\alpha}{p}} |b-x_0 - [x-x_0]u|^{\frac{\beta}{p}} + |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} |x-x_0|^{\frac{\beta}{p}} |1-u|^{\frac{\beta}{p}} < \\ & < |x-x_0|^{\frac{\alpha}{p}} |b-x_0|^{\frac{\beta}{p}} + |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} |x-x_0|^{\frac{\beta}{p}}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\|\varphi^{(k)}\|_{p,p}^p = \int_a^b \rho(x) \left| \int_0^1 u^k \rho^{-\frac{1}{p}}(x_0 + [x-x_0]u) \mathcal{E}_k(x_0 + [x-x_0]u) du \right|^p dx \leq$$

$$\leq 2^{p-1} (I_1 + I_2 + I_3), \quad (16)$$

dabei wurden die Bezeichnungen

$$I_1 := \int_a^{x_0} \rho(x) \left| \int_0^1 u^k \rho^{-\frac{1}{p}}(x_0 + [x-x_0]u) - \rho^{-\frac{1}{p}}(x) \right| \mathcal{E}_k(x_0 + [x-x_0]u) du \right|^p dx \quad (17)$$

$$I_2 := \int_{x_0}^b \rho(x) \left| \int_0^1 u^k \left[\rho^{-\frac{1}{p}}(x_0 + [x-x_0]u) - \rho^{-\frac{1}{p}}(x) \right] \mathcal{E}_k(x_0 + [x-x_0]u) du \right|^p dx \quad (18)$$

$$I_3 := \int_a^b \left| \int_0^1 u^k g_k(x_0 + [x-x_0]u) du \right|^p dx \quad (19)$$

eingeführt. I_1 , I_2 und I_3 schätzen wir jetzt der Reihe nach ab.

$$\begin{aligned} I_1 &< 2^{p-1} \int_a^{x_0} |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{-\beta} \left| \int_0^1 |x-x_0|^{\frac{\alpha}{p}} |b-a|^{\frac{\beta}{p}} u^k |g_k(x_0 + [x-x_0]u)| du \right|^p dx + \\ &+ 2^{p-1} \int_a^{x_0} |b-x|^{-\beta} \left| \int_0^1 |x-x_0|^{\frac{\beta}{p}} u^k |g_k(x_0 + [x-x_0]u)| du \right|^p dx \leq \\ &\leq 2^{p-1} \int_a^{x_0} |x-a|^{-\alpha} |b-x_0|^{-\beta} \frac{|x-x_0|^\alpha}{x-x_0} \int_{x_0}^x |b-a|^\beta |g_k(y)|^p dy dx + \\ &+ 2^{p-1} \int_a^{x_0} |b-x|^{-\beta} |x-x_0|^\beta \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x |g_k(y)|^p dy dx \leq \\ &\leq 2^{p-1} \left| \frac{b-a}{b-x_0} \right|^\beta \int_a^{x_0} |x-a|^{-\alpha} |x-x_0|^{\alpha-1} \|g_k\|_p^p dx + 2^{p-1} |b-x_0|^{-\beta} \times \\ &\times \frac{|x_0-a|^\beta}{\beta} \|g_k\|_p^p < \\ &< 2^{p-1} \left\{ \left| \frac{b-a}{b-x_0} \right|^\beta \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) + \left| \frac{x_0-a}{b-x_0} \right|^\beta \cdot \frac{1}{\beta} \right\} \|f^{(k+1)}\|_{p,p}^p. \quad (20) \end{aligned}$$

$$I_2 < 2^{p-1} \int_{x_0}^b |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{-\beta} \left| \int_0^1 |x-x_0|^{\frac{\alpha}{p}} |b-a|^{\frac{\beta}{p}} u^k |g_k(x_0 + [x-x_0]u)| du \right|^p dx +$$

$$+ 2^{p-1} \int_{x_0}^b |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{-\beta} \left\{ \int_0^1 |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} |x-x_0|^{\frac{\beta}{p}} u^k |g_k(x_0 + [x-x_0]u)|^p du \right\} dx \leq$$

$$\leq 2^{p-1} \int_{x_0}^b |x_0-a|^{-\alpha} |b-x|^{-\beta} \frac{|x-x_0|^{\alpha}}{x-x_0} \int_{x_0}^x |b-a|^{\beta} |g_k(y)|^p dy dx +$$

$$+ 2^{p-1} \int_{x_0}^b |b-x|^{-\beta} |x-x_0|^{\beta} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x |g_k(y)|^p dy dx <$$

$$< 2^{p-1} \left\{ |b-a|^{\beta} |x_0-a|^{-\alpha} \int_{x_0}^b |b-x|^{-\beta} |x-x_0|^{\alpha-1} dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^b |b-x|^{-\beta} |x-x_0|^{\beta-1} dx \right\} \|g_k\|_p^p <$$

$$< 2^{p-1} \{ 2^{\beta-\alpha} \cdot (\frac{b-a}{b-x_0})^{\beta} \cdot (\frac{b-x_0}{x_0-a})^{\alpha} (\frac{1}{\alpha+1-\beta}) + (\frac{1}{\beta+1-\beta}) \} \|f^{(k+1)}\|_{p,p}^p \quad (21)$$

$$I_3 \leq \int_a^b \left\{ \int_0^1 |g_k(x_0 + [x-x_0]u)|^p u^{\frac{1}{pq}} \cdot u^{-\frac{1}{pq}} du \right\} dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \int_0^1 u^{\frac{1}{q}} |g_k(x_0 + [x-x_0]u)|^p du dx \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)^{p-1} =$$

$$= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} \int_0^1 \int_a^b u^{\frac{1}{q}} |g_k(x_0 + [x-x_0]u)|^p dx du =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} \int_0^1 u^{\frac{1}{q}-1} \int_{x_0+[a-x_0]u}^{x_0+[b-x_0]u} |g_k(y)|^p dy du < \\
 &< \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} \int_0^1 u^{\frac{p-1}{p}-1} du \|g_k\|_p^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho}^p, \quad (22)
 \end{aligned}$$

dabei wurde $q = \frac{p}{p-1}$ gesetzt. Aus (16) bis (22) ergibt sich:

$$\|\varphi^{(k)}\|_{p,\rho} < M_1 \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho} \quad \text{für } \alpha, \beta \in (0,1) \quad (23)$$

und $k=0,1,\dots,n-1$, falls $x_0 \in (a,b)$ ist. Dabei hängt M_1 ,

$$\begin{aligned}
 M_1 := & 2^{\frac{p-1}{p}} (2^{p-1} [(\frac{b-a}{b-x_0})^\beta (\frac{1}{\alpha+1-\alpha}) + (\frac{x_0-a}{b-x_0})^\beta \frac{1}{\beta} + \\
 & + 2^{\beta-\alpha} (\frac{b-a}{b-x_0})^\beta (\frac{b-x_0}{x_0-a})^\alpha (\frac{1}{\alpha+1-\beta}) + (\frac{1}{\beta+1-\beta})] + (\frac{p}{p-1})^p)^{\frac{1}{p}},
 \end{aligned}$$

weder von f noch von n ab.

1.2.2. Nun sei $\alpha=0$ und $\beta \in (0,1)$ vorausgesetzt. Mit Hilfe der Abschätzung

$$\begin{aligned}
 &|\rho^{-\frac{1}{p}}(x_0+[x-x_0]u) - \rho^{-\frac{1}{p}}(x)| = \left| |b-x_0-[x-x_0]u|^{\frac{\beta}{p}} - |b-x|^{\frac{\beta}{p}} \right| = \\
 &= \left| |b-x+[x-x_0](1-u)|^{\frac{\beta}{p}} - |b-x|^{\frac{\beta}{p}} \right| \leq |x-x_0|^{\frac{\beta}{p}} |1-u|^{\frac{\beta}{p}} \leq |x-x_0|^{\frac{\beta}{p}}
 \end{aligned}$$

können wir Schranken für I_1 und I_2 angeben.

$$\begin{aligned}
 I_1 &< \int_a^{x_0} |b-x|^{-\beta} \left(\int_0^1 |x-x_0|^{\frac{\beta}{p}} u^k |g_k(x_0+[x-x_0]u)| du \right)^p dx < \\
 &< \int_a^{x_0} |b-x|^{-\beta} |x-x_0|^\beta \int_0^1 |g_k(x_0+[x-x_0]u)|^p du dx <
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & < |b-x_0|^{-\beta} \int_a^{x_0} |x-x_0|^{\beta} \int_0^1 |g_k(x_0+[x-x_0]u)|^p du dx = \\
 & = |b-x_0|^{-\beta} \int_a^{x_0} |x_0-x|^{\beta-1} \int_x^{x_0} |g_k(y)|^p dy dx < \\
 & < |b-x_0|^{-\beta} \int_a^{x_0} |x-x_0|^{\beta-1} \|g_k\|_p^p dx = \left(\frac{x_0-a}{b-x_0}\right)^{\beta} \frac{1}{\beta} \|g_k\|_p^p = \\
 & = \frac{1}{\beta} \left(\frac{x_0-a}{b-x_0}\right)^{\beta} \|f^{(k+1)}\|_{p,p}^p. \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 & < \int_{x_0}^b |b-x|^{-\beta} \left\{ \int_0^1 |x-x_0|^{\frac{\beta}{p}} u^k |g_k(x_0+[x-x_0]u)| du \right\}^p dx < \\
 & < \int_{x_0}^b |b-x|^{-\beta} |x-x_0|^{\beta} \int_0^1 |g_k(x_0+[x-x_0]u)|^p du dx = \\
 & = \int_{x_0}^b |b-x|^{-\beta} |x-x_0|^{\beta-1} \int_{x_0}^x |g_k(y)|^p dy dx < \\
 & < \int_{x_0}^b (b-x)^{-\beta} (x-x_0)^{\beta-1} \|g_k\|_p^p dx < \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{1-\beta}\right) \|g_k\|_p^p = \\
 & = \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{1-\beta}\right) \|f^{(k+1)}\|_{p,p}^p. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Die Formel (22) gilt natürlich auch für $\alpha=0$.

Aus (22), (24) und (25) ergibt sich

$$\|\varphi^{(k+1)}\|_{p,\rho} < M_1 \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho} \quad (26)$$

für $\alpha=0$, $\beta \in (0,1)$ und $k=0,1,\dots,n-1$, falls $x_0 \in (a,b)$,
wobei $M_1 := 2^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \frac{1}{\beta} \left(\frac{x_0-a}{b-x_0} \right)^\beta + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{1-\beta} \right) + \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}}$ ist.

1.2.3. Nun sei $\alpha \in (0,1)$ und $\beta=0$ vorausgesetzt. Mit Hilfe der Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \rho^{-\frac{1}{p}}(x_0+[x-x_0]u) - \rho^{-\frac{1}{p}}(x) \right| &= \left| |x_0+[x-x_0]u-a|^{\frac{\alpha}{p}} - |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} \right| = \\ &= \left| |(x-a)+[x-x_0](u-1)|^{\frac{\alpha}{p}} - |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} \right| \leq |x-x_0|^{\frac{\alpha}{p}} (1-u)^{\frac{\alpha}{p}} \leq |x-x_0|^{\frac{\alpha}{p}} \end{aligned}$$

geben wir wieder Schranken für I_1 und I_2 an.

$$\begin{aligned} I_1 &< \int_a^{x_0} |x-a|^{-\alpha} \left[\int_0^1 |x-x_0|^{\frac{\alpha}{p}} u^k |g_k(x_0+[x-x_0]u)| du \right]^p dx < \\ &< \int_a^{x_0} |x-a|^{-\alpha} |x-x_0|^\alpha \int_0^1 |g_k(x_0+[x-x_0]u)|^p du dx < \\ &< \int_a^{x_0} |x-a|^{-\alpha} |x-x_0|^{\alpha-1} \|g_k\|_p^p dx < \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho}^p \quad (27) \\ I_2 &< \int_{x_0}^b |x-a|^{-\alpha} \left[\int_0^1 |x-x_0|^{\frac{\alpha}{p}} u^k |g_k(x_0+[x-x_0]u)| du \right]^p dx < \\ &< \int_{x_0}^b |x_0-a|^{-\alpha} |x-x_0|^\alpha \int_0^1 |g_k(x_0+[x-x_0]u)|^p du dx < \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^b |x_0 - a|^{-\alpha} |x - x_0|^{\alpha-1} \|g_k\|_p^p dx = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{b-x_0}{x_0-a} \right)^\alpha \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho}^p \quad (28)$$

Die Formel (22) gilt natürlich auch für $\beta=0$.

Aus (22), (27) und (28) ergibt sich

$$\|\varphi^{(k)}\|_{p,\rho} < M_1'' \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho} \quad (29)$$

für $\beta=0$, $\alpha \in (0,1)$ und $k=0,1,\dots,n-1$, falls $x_0 \in (a,b)$, wobei

$$M_1'' := 2^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left(\frac{b-x_0}{x_0-a} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \right) + \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \text{ gesetzt ist.}$$

1.2.4. Nun sei $\alpha=\beta=0$ vorausgesetzt, dann gilt

$$\|\varphi^{(k)}\|_{p,\rho} = I_3 < \left(\frac{p}{p-1} \right) \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho} \quad (30)$$

1.3. Schliesslich werde der Fall $x_0=b$ betrachtet, dann gilt analog wie unter 1.1. (Formel (15)):

$$\|\varphi^{(k)}\|_{p,\rho}^p \leq 2^\alpha \cdot \left\{ \frac{1}{\beta+kp} + \frac{1}{1-\alpha} \right\} \cdot \left(\frac{p}{p-1} \right)^p + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho}^p \text{ für } \alpha+kp \begin{cases} < 0 \\ = 0 \end{cases} \quad (31)$$

$k=0,1,\dots,n-1$ und $\alpha, \beta \in [0,1)$.

Nach (15), (23), (26), (29), (30) und (31) gilt also für $m=1$ in jedem Falle die Formel

$$\|\varphi^{(k)}\|_{p,\rho} < M \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho} \text{ für } k=0,1,\dots,n-1, \quad (32)$$

also (10) für $m=1$, d.h. es ist $\varphi \in W_p^{n-1}([a,b], \rho)$.

Für $m=1$ haben wir damit alles gezeigt.

2. Dieser Punkt des Beweises stimmt mit dem Punkt 2. des Beweises von Hilfssatz 4.1 wortgetreu überein, wenn man die Konstante $\left(\frac{9}{4}\right)$ durch M ersetzt. q.e.d.

Hilfssatz 4.3: Sei $p > 1$ und $\alpha, \beta \in (-1, p-1)$. Ausserdem seien m und n natürliche Zahlen mit $m \leq n$,

$$\rho(x) := (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta} \quad \text{für } x \in [a, b],$$

$f \in W_p^n([a, b], \rho)$ und $x_0 \in [a, b]$ mit $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k=0, 1, \dots, m-1$.

Dann liegt die Funktion φ ,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m} & \text{für } x \in [a, b] \setminus \{x_0\} \\ \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} & \text{für } x = x_0, \end{cases}$$

im Raum $W_p^{n-m}([a, b], \rho)$ und es gilt

$$\|\varphi\|_{W_p^{n-m}, \rho} \leq M \|f\|_{W_p^n, \rho}. \quad (33)$$

Beweis: Nach den Hilfssätzen 4.1 und 4.2 brauchen wir nur noch die beiden Fälle: 1. $\alpha \in (-1, 0]$, $\beta \in [0, p-1)$

und 2. $\alpha \in [0, p-1)$, $\beta \in (-1, 0]$ zu betrachten.

Da der zweite Fall durch Vertauschen von α und β aus dem ersten hervorgeht, können wir unsere Betrachtung auf den ersten Fall beschränken. Es sei also $\alpha \in (-1, 0]$ und $\beta \in [0, p-1)$. Wir setzen $\alpha' := -\alpha$ und $\beta' := \frac{\beta}{p-1}$ und schreiben dafür wieder α und β .

Wir beweisen wieder mit vollständiger Induktion nach m .

1. Sei $m=1$. Wie zu Beginn des Beweises von Hilfssatz 4.1 schreiben wir nach (4) wieder:

$$\varphi^{(k)}(x) = \int_0^1 u^k f^{(k+1)}(x_0 + [x-x_0]u) du, \quad x \in [a, b], \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

Ebenfalls setzen wir $g_k(y) := \rho^{\frac{1}{p}}(y) f^{(k+1)}(y)$

für $y \in [a, b]$ und $k=0, 1, \dots, n-1$ und bemerken, dass:

$$g_k \in L_p[a, b] \quad \text{mit} \quad \|g_k\|_p = \|f^{(k+1)}\|_{p, \rho}.$$

1.1. Sei $x_0 = a$, dann gilt:

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq \int_0^1 u^k \rho^{-\frac{1}{p}}(x_0 + [x-x_0]u) |g_k(x_0 + [x-x_0]u)| du =$$

$$= \int_0^1 u^k |x-a|^{-\frac{\alpha}{p}} |b-a-[x-a]u|^{-\frac{\beta}{p}(p-1)} |g_k(a+[x-a]u)| du <$$

$$< \int_0^1 (x-a)^{\frac{\alpha}{p}} (b-x)^{-\frac{\beta}{p}(p-1)} |g_k(a+[x-a]u)| du .$$

Dabei erfolgte die letzte Vergrößerung auf Grund von

$$|b-a-[x-a]u| \geq |b-a-[x-a] \cdot 1| = |b-x| .$$

Wir erhalten nun für die Norm von $\varphi^{(k)}$

$$\|\varphi^{(k)}\|_{p,p}^p = \int_a^b \rho(x) |\varphi^{(k)}(x)|^p dx <$$

$$< \int_a^b |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{\beta(p-1)} \left\{ \int_0^1 |x-a|^{-\frac{\alpha}{p}} |b-x|^{-\frac{\beta}{p}(p-1)} |g_k(x_0+[x-x_0]u)| du \right\}^p dx =$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_0^1 |g_k(x_0+[x-x_0]u)| du \right\}^p dx = \int_a^b \left\{ \frac{1}{x-a} \int_a^x |g_k(v)| dv \right\}^p dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \sup_{a < z < x} \left\{ \frac{1}{x-z} \int_z^x |g_k(v)| dv \right\}^p dx \leq$$

Wir können nun mit der Formel von Hardy/Littlewood (siehe [28] §21, Korollar(21,77)(i)) weiter nach oben abschätzen und es ergibt sich :

$$\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b |g_k(v)|^p dv = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|g_k\|_p^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f^{(k+1)}\|_{p,p}^p . \quad (54)$$

2. Nun sei $x_0 \in (a, b)$. Bevor wir $\|\varphi^{(k)}\|_{p,p}$ nach oben abschätzen, betrachten wir die beiden mittleren Faktoren im Integranden des

$$\varphi^{(k)}(x) = \int_0^1 u^k (x_0 + [x-x_0]u-a)^{\frac{\alpha}{p}} (b-x_0-[x-x_0]u)^{-\frac{\beta}{p}(p-1)} g_k(x_0+[x-x_0]u) du.$$

Für $x \in [a, b]$, $u \in [0, 1]$ und $\alpha \in [0, 1)$ gilt stets

$$|x_0 + [x-x_0]u-a|^{\frac{\alpha}{p}} = |x-a + [x-x_0](u-1)|^{\frac{\alpha}{p}} \leq |x-a|^{\frac{\alpha}{p}} + |x-x_0|^{\frac{\alpha}{p}}$$

$$\begin{aligned} |b-x_0-[x-x_0]u| &\geq |b-x_0-[x-x_0] \cdot 1| = |b-x| \quad \text{für } x \geq x_0 \\ &\geq |b-x_0-[x-x_0] \cdot 0| = |b-x_0| \quad \text{für } x < x_0, \end{aligned}$$

also ist

$$\|\varphi^{(k)}\|_{p, \rho}^p = \int_a^{x_0} \rho(x) |\varphi^{(k)}(x)|^p dx + \int_{x_0}^b \rho(x) |\varphi^{(k)}(x)|^p dx <$$

$$\leq \int_a^{x_0} |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{\beta(p-1)} \left(\int_0^1 u^k (|x-a|^{\frac{\alpha}{p}} + |x-x_0|^{\frac{\alpha}{p}}) |b-x_0|^{-\frac{\beta}{p}(p-1)} \times \right.$$

$$\left. \times |g_k(x_0 + [x-x_0]u)| du \right)^p dx +$$

$$+ \int_{x_0}^b |x-a|^{-\alpha} |b-x|^{\beta(p-1)} \left(\int_0^1 u^k (|x-a|^{\frac{\alpha}{p}} + |x-x_0|^{\frac{\alpha}{p}}) |b-x|^{-\frac{\beta}{p}(p-1)} \times \right.$$

$$\left. \times |g_k(x_0 + [x-x_0]u)| du \right)^p dx <$$

$$\leq 2^{p-1} \int_a^{x_0} \left(\frac{b-a}{b-x_0} \right)^{\beta(p-1)} \left(\int_0^1 |g_k(x_0 + [x-x_0]u)| du \right)^p dx +$$

$$+ 2^{p-1} \int_{x_0}^b \left(\frac{x_0-x}{x-a} \right)^{\alpha} \left(\frac{b-a}{b-x_0} \right)^{\beta(p-1)} \left(\int_0^1 |g_k(x_0 + [x-x_0]u)| du \right)^p dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2^{p-1} \int_{x_0}^b \int_0^1 |g_k(x_0 + [x-x_0]u)| du)^p dx + \\
 & + 2^{p-1} \int_{x_0}^b \left(\frac{b-x_0}{b-a}\right)^\alpha \left(\int_0^1 |g_k(x_0 + [x-x_0]u)| du \right)^p dx \leq \\
 & \leq 2^{p-1} \left(\frac{b-a}{b-x_0}\right)^{\beta(p-1)} \int_a^{x_0} \left(\frac{1}{x_0-x}\right) \int_x^{x_0} |g_k(v)| dv)^p dx + \\
 & + 2^{p-1} \left(\frac{b-a}{b-x_0}\right)^{\beta(p-1)} \int_a^{x_0} \left(\frac{x-x_0}{x-a}\right)^\alpha \int_0^1 |g_k(x_0 + [x-x_0]u)|^p du dx + \\
 & + 2^{p-1} \int_{x_0}^b \left(\frac{1}{x-x_0}\right) \int_{x_0}^x |g_k(v)| dv)^p dx + \\
 & + 2^{p-1} \left(\frac{b-x_0}{b-a}\right)^\alpha \int_{x_0}^b \left(\frac{1}{x-x_0}\right) \int_{x_0}^x |g_k(v)| dv)^p dx \leq \\
 & \leq 2^{p-1} \left(\frac{b-a}{b-x_0}\right)^{\beta(p-1)} \int_a^{x_0} \sup_{x_0 < z < x_0} \left(\frac{1}{z-x}\right) \int_x^z |g_k(v)| dv)^p dx + \\
 & + 2^{p-1} \left(\frac{b-a}{b-x_0}\right)^{\beta(p-1)} \int_a^{x_0} |x-a|^{-\alpha} |x-x_0|^{\alpha-1} \int_x^{x_0} |g_k(v)|^p dv dx + \\
 & + 2^{p-1} \int_{x_0}^b \sup_{x_0 < z < x} \left(\frac{1}{x-z}\right) \int_z^x |g_k(v)| dv)^p dx +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2^{p-1} \left(\frac{b-x_0}{x_0-a} \right)^\alpha \int_{x_0}^b \sup_{x_0 < z < x} \left(\frac{1}{x-z} \int_z^x |g_k(v)| dv \right)^p dx < \\
 & < 2^{p-1} \left| \frac{b-a}{b-x_0} \right|^{\beta(p-1)} \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^{x_0} |g_k(v)|^p dv + \\
 & + \left(\frac{b-a}{b-x_0} \right)^{\beta(p-1)} \int_a^{x_0} |x-a|^{-\alpha} |x-x_0|^{\alpha-1} \|g_k\|_p^p dx + \\
 & + \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_{x_0}^b |g_k(v)|^p dv + \left(\frac{b-x_0}{x_0-a} \right)^\alpha \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_{x_0}^b |g_k(v)|^p dv < \\
 & < 2^{p-1} \left(\left| \frac{b-a}{b-x_0} \right|^{\beta(p-1)} + 1 + \left| \frac{b-x_0}{x_0-a} \right|^\alpha \right) \left(\frac{p}{p-1} \right)^p + \left| \frac{b-a}{b-x_0} \right|^{\beta(p-1)} \left(\frac{1}{\alpha+1-\alpha} \right) \|g_k\|_p^p .
 \end{aligned}$$

$$\text{Also ist } \|\varphi^{(k)}\|_{p,\rho} < M_2 \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho} \quad (35)$$

für $x_0 \in (a, b)$ und $k=0, 1, \dots, n-1$.

1.3. Schließlich sei $x_0=b$. In diesem Falle kann man analog zu 1.1. (siehe Formel (34)) die Formel

$$\|\varphi^{(k)}\|_{p,\rho} < \left(\frac{p}{p-1} \right) \|f^{(k+1)}\|_{p,\rho} \quad (36)$$

für $x_0=b$ und $k=0, 1, \dots, n-1$ beweisen.

Aus (34) bis (36) folgt (33) für $m=1$ und $x_0 \in [a, b]$.

2. Dieser Punkt des Beweises stimmt mit dem Punkt 2. des Beweises von Hilfssatz 4.1 wortgetreu überein, wenn man die Konstante $\left(\frac{1}{\alpha} \right)$ durch M ersetzt. Q.e.d.

Es sei $p > 1$, $W_p^n([a, b], \rho)$ wie im Hilfssatz 4.3 und $f \in W_p^n([a, b], \rho)$.

Auf Grund des Sobolev'schen Einbettungssatzes und unseres Hilfssatzes 2.1 ist $f^{(j)} \in C[a, b]$ für $j=0, 1, \dots, n-1$ und es gilt:

$$\|f^{(j)}\|_{C[a,b]} \leq M_3 \|f^{(j)}\|_{W_p^1([a,b], \rho)} \quad \text{für } j=0, 1, \dots, n-1.$$

Daher lässt sich der Hilfssatz 4.5 aus [1] auch in unserem Falle aussprechen (Der Beweis ist im wesentlichen derselbe) .

Hilfssatz 4.4 : Sei $p > 1$, $W_p^n([a,b], \rho)$ wie vorher und $n \geq m_1$ ($i=1,2,\dots,r$) , wobei $m_1, m_2, \dots, m_r$ vorgegebene natürliche Zahlen sind . Des weiteren seien $x_1, x_2, \dots, x_r$ paarweise verschiedene Punkte des Segmentes $[a,b]$ und ξf sei ein Polynom , das die Bedingungen (2) erfüllt (z.B. das durch (1) definierte Polynom) . Dann liegt die durch

$$F(x) := \frac{f(x) - (\xi f)(x)}{\prod_{i=1}^r (x-x_i)^{m_i}} \quad , \quad x \in [a,b]$$

definierte Funktion F im Raume $W_p^{n-m}([a,b], \rho)$ mit $m := \max\{m_1, \dots, m_r\}$ und es gilt :

$$\|F\|_{W_p^{n-m}, \rho} \leq K_1 \|f\|_{W_p^n} \quad ,$$

wobei K_1 eine Konstante ist , die nicht von der Wahl der Funktion f abhängt .

Hilfssatz 4.5 : Es sei Γ ein System von endlich vielen , paarweise disjunkten und einfachen $C^{n,\mu}$ -Kurven . Zu dem System Γ mögen r nicht geschlossene Kurven $\Gamma_k := \overset{\curvearrowright}{c_k} c_{r+k}$, $k=1,2,\dots,r$, und l geschlossene Kurven Γ_k , $k=r+1, r+2, \dots, r+l$, gehören . Ferner sei zu jedem Endpunkt c_k ($k=1,2,\dots,2r$) und zu jedem von s beliebigen inneren Punkten c_k ($k=2r+1, 2r+2, \dots, 2r+s$) der Kurven aus Γ eine Zahl γ_k mit $-1 < \gamma_k < p-1$ ($p > 1$, $k=1,2,\dots,2r+s$) gegeben . ρ werde dann definiert durch

$$\rho(t) := \prod_{k=1}^{2r+s} |t-c_k|^{\gamma_k} \quad , \quad t \in \Gamma \quad .$$

Des weiteren sei $f \in W_p^n(\Gamma, \rho)$ und $n \geq m_1$ ($i=1,2,\dots,u$) , wobei $m_1, m_2, \dots, m_u$ vorgegebene natürliche Zahlen sind . Schliesslich seien $t_1, t_2, \dots, t_u$ paarweise verschiedene Punkte von Γ und ξf sei ein Polynom , das den Bedingungen

$$(\xi f)^{(j)}(t_i) = f^{(j)}(t_i)$$

für $j=0,1,\dots,m_i-1$ und $i=1,2,\dots,u$ genügt . Dann liegt die

durch $F(x) := \frac{f(t) - (\mathfrak{G}f)(t)}{\prod_{i=1}^u (t-t_i)^{m_i}}$, $t \in \Gamma$, definierte Funktion F im

Raum $W_p^{n-m}(\Gamma, \rho)$ mit $m := \max \{m_1, m_2, \dots, m_u\}$ und es gilt

$$\|F\|_{W_p^{n-m}} \leq K_1 \|f\|_{W_p^n},$$

wobei K_1 eine Konstante ist, die nicht von der Wahl der Funktion f abhängt.

Hilfssatz 4.6: Sei Γ , ρ und $W_p^n(\Gamma, \rho)$ wie im Hilfssatz 4.5. Ferner sei $\mathfrak{G}$ ein durch die Formeln (1) gegebener Operator, der die Bedingungen

$$(\mathfrak{G}\varphi)^{(j)}(c_i) = \varphi^{(j)}(c_i), \quad j=0,1,\dots,n-1, \quad i=1,2,\dots,2r+s \quad \text{für}$$

$\varphi \in C^{n-1}(\Gamma)$ erfüllt. Dann ist die Abbildung $\mathfrak{F}_1$,

$$(\mathfrak{F}_1\varphi)(t) := \rho^{\frac{1}{p}}(t)[(I_1 - \mathfrak{G})\varphi](t) + (\mathfrak{G}\varphi)(t), \quad t \in \Gamma, \quad \varphi \in W_p^n(\Gamma, \rho),$$

ein Isomorphismus des normierten Raumes $W_p^n(\Gamma, \rho)$ auf den Banachraum $W_p^n(\Gamma)$ und die Abbildung $\mathfrak{F}_\lambda$,

$$(\mathfrak{F}_\lambda\varphi)(t) := \rho^{\frac{\lambda}{p}}(t)[(I_1 - \mathfrak{G})\varphi](t) + (\mathfrak{G}\varphi)(t), \quad t \in \Gamma, \quad \varphi \in W_p^n(\Gamma, \rho),$$

$\lambda \in [0, \frac{p}{p-1}]$, ist ein Isomorphismus des normierten Raumes $W_p^n(\Gamma, \rho)$ auf den normierten Raum $W_p^n(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$. Also sind die Räume $W_p^n(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$, $\lambda \in [0, \frac{p}{p-1}]$, ebenfalls Banachräume. Die inversen Abbildungen sind:

$$\mathfrak{F}_1^{-1} = \rho^{-\frac{1}{p}} (I_0 - \mathfrak{G}) + \mathfrak{G} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{F}_\lambda^{-1} = \rho^{-\frac{\lambda}{p}} (I_{1-\lambda} - \mathfrak{G}) + \mathfrak{G}.$$

Dabei bezeichnet I_1 , I_0 bzw. $I_{1-\lambda}$ die identische Abbildung des Raumes $W_p^n(\Gamma, \rho)$, $W_p^n(\Gamma)$ bzw. $W_p^n(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ auf sich.

Beweis: Die Linearität ist offensichtlich.

Da die Operatoren: $(I_1 - \mathfrak{G})$, $(I_0 - \mathfrak{G})$ und $(I_{1-\lambda} - \mathfrak{G})$ stets Nullstellen n -ter Ordnung in den Punkten c_i , $i=1,2,\dots,2r+s$, von Γ er-

zeugen , gilt für $\varphi \in C^{n-1}(\Gamma)$:

$$\rho^{\frac{\mu}{p}(-1)^k} (I_{(1-\mu)^k} - \mathfrak{S}) \varphi \in C^{n-1}(\Gamma)$$

$$\text{und } \mathfrak{S} \rho^{\frac{\mu}{p}(-1)^k} \{ I_{(1-\mu)^k} - \mathfrak{S} \} = 0 \quad \text{für: } k=0,1, \mu=1,\lambda, \quad 0^0:=1$$

Ausserdem gilt : $(I, -\mathfrak{S})\mathfrak{S} = 0$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$ für $v=1,0,(1-\lambda)$.

Wir zeigen nun , dass $\mathfrak{U}_\lambda \mathfrak{U}_\lambda^{-1} = I_{1-\lambda}$ und $\mathfrak{U}_\lambda^{-1} \mathfrak{U}_\lambda = I_1$ gilt .

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_\lambda \mathfrak{U}_\lambda^{-1} &= \rho^{\frac{\lambda}{p}(I_1-\mathfrak{S})} \rho^{-\frac{\lambda}{p}(I_{1-\lambda}-\mathfrak{S})} + \mathfrak{S} \rho^{-\frac{\lambda}{p}(I_{1-\lambda}-\mathfrak{S})} + \rho^{\frac{\lambda}{p}(I_1-\mathfrak{S})} \mathfrak{S} + \mathfrak{S}\mathfrak{S} = \\ &= \rho^{\frac{\lambda}{p}I_1} \rho^{\frac{\lambda}{p}(I_{1-\lambda}-\mathfrak{S})} - \rho^{\frac{\lambda}{p}\mathfrak{S}} \rho^{\frac{\lambda}{p}(I_{1-\lambda}-\mathfrak{S})} + 0 + 0 + \mathfrak{S} = \\ &= (I_{1-\lambda} - \mathfrak{S}) - 0 + \mathfrak{S} = I_{1-\lambda} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_\lambda^{-1} \mathfrak{U}_\lambda &= \rho^{-\frac{\lambda}{p}(I_{1-\lambda}-\mathfrak{S})} \rho^{\frac{\lambda}{p}(I_1-\mathfrak{S})} + \mathfrak{S} \rho^{\frac{\lambda}{p}(I_1-\mathfrak{S})} + \rho^{-\frac{\lambda}{p}(I_{1-\lambda}-\mathfrak{S})} \mathfrak{S} + \mathfrak{S}\mathfrak{S} = \\ &= \rho^{-\frac{\lambda}{p}I_{1-\lambda}} \rho^{\frac{\lambda}{p}(I_1-\mathfrak{S})} - \rho^{-\frac{\lambda}{p}\mathfrak{S}} \rho^{\frac{\lambda}{p}(I_1-\mathfrak{S})} + 0 + 0 + \mathfrak{S} = \\ &= (I_1 - \mathfrak{S}) - 0 + \mathfrak{S} = I_1 . \end{aligned}$$

Für $\lambda=1$ ergibt sich speziell : $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_1^{-1} = I_0$ und $\mathfrak{U}_1^{-1} \mathfrak{U}_1 = I_1$.

Weil die Operatoren $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_1^{-1}$, $\mathfrak{U}_\lambda \mathfrak{U}_\lambda^{-1}$, $\mathfrak{U}_1^{-1} \mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_\lambda^{-1} \mathfrak{U}_\lambda$ stetig sind und die Operatoren $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_1^{-1}$, $\mathfrak{U}_\lambda$ und $\mathfrak{U}_\lambda^{-1}$ überall auf $W_p^n(\Gamma, \rho)$, $W_p^n(\Gamma)$, $W_p^n(\Gamma, \rho)$ bzw. $W_p^n(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ definiert sind , folgt , dass auch $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_1^{-1}$, $\mathfrak{U}_\lambda$ und $\mathfrak{U}_\lambda^{-1}$ stetig sind . Q.e.d.

5. Abschnitt

DIE STETIGKEIT DES OPERATORS $SH_\lambda : W_p^n(\Gamma, \rho) \rightarrow W_p^n(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$

Hilfssatz 5.1 : Der Raum $C^\infty[a, b]$ aller auf dem Segment $[a, b]$ unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen liegt dicht in jedem Banachraum $C^{m, \mu}_0[a, b]$, wobei m eine ganze, nicht negative Zahl und $\mu \in (0, 1)$ ist.

Beweis : Sei $\varphi \in C^{m, \mu}[a, b]$. φ lässt sich zu einer Funktion $\tilde{\varphi} \in C^{m, \mu}[a-1, b+1]$ fortsetzen. Wir konstruieren nun eine Folge von Mittelfunktionen $\varphi(n)$,

$$\varphi(n)(t) := n \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} \tilde{\varphi}(\sigma) \omega(n|t-\sigma|) d\sigma, \quad t \in [a, b], \quad n=1, 2, \dots,$$

mit der Funktion ω aus dem 3. Abschnitt und zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi(n) - \varphi\|_{C^{m, \mu}[a, b]} = 0 \text{ ist.}$$

Aus Formel (2) des dritten Abschnittes folgt

$$\begin{aligned} \varphi(n)^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t) &= n \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} [\tilde{\varphi}^{(k)}(\sigma) - \tilde{\varphi}^{(k)}(t)] \omega(n|t-\sigma|) d\sigma = \\ &= \int_{-1}^1 [\tilde{\varphi}^{(k)}(t+\frac{u}{n}) - \tilde{\varphi}^{(k)}(t)] \omega(u) du \end{aligned}$$

für $k=0, 1, \dots, m$, $n=1, 2, \dots$ und $t \in [a, b]$. Wir schätzen nun den Betrag der Differenz $(\varphi(n)^{(k)} - \varphi^{(k)})$

mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung nach oben ab.

$$|\varphi(n)^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)| \leq \int_{-1}^1 |\tilde{\varphi}^{(k)}(t+\frac{u}{n}) - \tilde{\varphi}^{(k)}(t)| \omega(u) du \leq$$

$$\leq 2c \left| \tilde{\varphi}^{(k)}\left(t+\frac{\xi}{n}\right) - \tilde{\varphi}^{(k)}(t) \right|, \quad (1)$$

für $t \in [a, b]$, $n=1, 2, \dots$, $k=0, 1, \dots, m$ und für ein $\xi \in [-1, 1]$.*

Es sei nun ein $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der gleichmässigen

Stetigkeit von $\tilde{\varphi}^{(k)}$, $k=0, 1, \dots, m$

auf $[a-1, b+1]$ gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so dass

$$\left| \tilde{\varphi}^{(k)}(t+v) - \tilde{\varphi}^{(k)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{m+2} \quad \text{für } v \in (-\delta, \delta), \quad k=0, 1, \dots, m$$

und jedes $t \in [a, b]$ gilt. Wegen (1) ist also

$$\left| \varphi_{(n)}^{(k)}(t) - \tilde{\varphi}^{(k)}(t) \right| \leq 2c \left| \tilde{\varphi}^{(k)}\left(t+\frac{\xi}{n}\right) - \tilde{\varphi}^{(k)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{m+2} \quad (2)$$

für jedes $t \in [a, b]$ und $k=0, 1, \dots, m$, falls nur $n > \delta^{-1}$ ist.

Wir wollen nun den Ausdruck

$$\sup_{t_1, t_2 \in [a, b]} \frac{\left| [\varphi_{(n)}^{(m)}(t_1) - \varphi_{(n)}^{(m)}(t_2)] - [\tilde{\varphi}^{(m)}(t_1) - \tilde{\varphi}^{(m)}(t_2)] \right|}{|t_1 - t_2|^\mu}$$

nach oben abschätzen. Man zeigt leicht mittels der Integralformel auf S.60 und (1):

$$\begin{aligned} & \left| [\varphi_{(n)}^{(m)}(t_1) - \varphi_{(n)}^{(m)}(t_2)] - [\tilde{\varphi}^{(m)}(t_1) - \tilde{\varphi}^{(m)}(t_2)] \right| \leq \\ & \leq 2c \left| [\tilde{\varphi}^{(m)}\left(t_1+\frac{\xi}{n}\right) - \tilde{\varphi}^{(m)}(t_1)] - [\tilde{\varphi}^{(m)}\left(t_2+\frac{\xi}{n}\right) - \tilde{\varphi}^{(m)}(t_2)] \right| \end{aligned} \quad (3)$$

für $t_1, t_2 \in [a, b]$, $n=1, 2, \dots$, $k=0, 1, \dots, m$ und für ein gewisses $\xi \in [-1, 1]$. Wir setzen nun:

$$I(v, t_1, t_2) := [\tilde{\varphi}^{(m)}(t_1+v) - \tilde{\varphi}^{(m)}(t_1)] - [\tilde{\varphi}^{(m)}(t_2+v) - \tilde{\varphi}^{(m)}(t_2)]$$

$$\text{und } J(v, t_1, t_2) := \frac{I(v, t_1, t_2)}{|t_1 - t_2|^\mu} \quad \text{für } v \in [-1, 1], \quad t_1, t_2 \in [a, b].$$

Wegen $\lim_{\substack{|t_1 - t_2| \rightarrow 0 \\ t_1, t_2 \in [a, b]}} J(v, t_1, t_2) = 0$ für $v \in [-1, 1]$ ist J stetig. (siehe Def. 1.5.!)

Daraus folgt die Existenz einer Zahl $\lambda > 0$, so dass für die Funktion J_0 ,

$$J_0(v) := \sup_{t_1, t_2 \in [a, b]} \frac{|I(v, t_1, t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}, \quad v \in [-1, 1], \quad \text{gilt:}$$

*) $\xi = \xi(t, h, n)$

$$|J_0(v_1) - J_0(v_2)| < \frac{\varepsilon}{m+2} \text{ für } v_1, v_2 \in [-1, 1] \text{ mit } |v_1 - v_2| < \lambda.$$

Wegen $J_0(0) = \sup_{t_1, t_2} \frac{|I(0, t_1, t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} = 0$ haben wir:

$$J_0\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) < \frac{\varepsilon}{m+2}, \quad (4)$$

sobald $n\lambda^{-1}$ ist. Aus (3) und (4) folgt sofort, dass

$$\sup_{t_1, t_2 \in [a, b]} \frac{|\varphi\left(\frac{m}{n}\right)(t_1) - \varphi\left(\frac{m}{n}\right)(t_2)| - |\varphi\left(\frac{m}{n}\right)(t_2) - \varphi\left(\frac{m}{n}\right)(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} < \frac{\varepsilon}{m+2} \quad (5)$$

für $n\lambda^{-1}$ ist. Schliesslich ergibt sich aus (2) und (5)

$$\|\varphi(n) - \varphi\|_{C^{m, \mu}[a, b]} < \varepsilon \quad \text{für } n > \max\{\delta^{-1}, \lambda^{-1}\}.$$

Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Folgerung 5.2: Sei $\mu \in (0, 1)$ und Γ ein System von endlich vielen, paarweise disjunkten und einfachen $C^{m+1, \mu}$ -Kurven. Die Räume $C^{m, 1}(\Gamma)$ und $C_o^{m, \varepsilon}(\Gamma)$ für $\mu \leq \varepsilon < 1$, liegen dicht im Banachraum $C_o^{m, \mu}(\Gamma)$. (vergl. auch [26] Seite 121)

Hilfssatz 5.3: Sei Γ eine einfache, nicht geschlossene $C^{m+1, \mu}$ -Kurve ($0 < \mu < 1$) mit dem Anfangspunkt a und dem Endpunkt b . Ferner sei $\varphi \in C^{m, \mu}(\Gamma)$ mit der Eigenschaft:

$$\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b) = 0 \quad \text{für } k=0, 1, 2, \dots, m.$$

Dann ist $S_1 \varphi \in C^{m, \mu}(\Gamma)$,

$$(S_1 \varphi)(t) := \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma \quad (9)$$

und es gilt: $(S_1 \varphi)^{(k)} = S_1 \varphi^{(k)}$ für $k=1, 2, \dots, m$. Das dabei auftretende singuläre Integral sei im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes verstanden.

Beweis: Wir ergänzen die Kurve Γ durch eine b mit a verbindende (offene), nicht geschlossene Kurve Γ^e zu einer geschlossenen $C^{m+1, \mu}$ -Kurve $\Gamma \cup \Gamma^e$ und setzen die Funktion φ zur Funktion Φ ,

$$\Phi(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } t \in \Gamma \\ 0 & \text{für } t \in \Gamma^e \end{cases}$$

9) Das $\oint$ am Integralzeichen soll andeuten, dass das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen ist.

von Γ auf $\Gamma \cup \Gamma^e$ fort. Auf die Funktion Φ wenden wir nun die Ergebnisse von [9] §4.4 Formel(4.17) an und erhalten durch Einschränkung der Funktion $(S_1\Phi)^{(k)}$ auf Γ unsere Behauptung.

Folgerung 5.4 : r und l seien zwei nicht negative ganze Zahlen. Γ bestehe aus r nicht geschlossenen $(\Gamma_i := \overset{\circ}{c}_i c_{r+1}, i=1,2,\dots,r)$ und l geschlossenen $(\Gamma_i, i=r+1, r+2, \dots, r+l)$, paarweise disjunkten, einfache $C^{m+1, \mu}$ -Kurven $(0 < \mu < 1)$. Auf Γ sei eine Richtung festgelegt. Für jede Funktion $\varphi \in C^{m, \mu}(\Gamma)$ mit der Eigenschaft :

$$\varphi^{(k)}(c_i) = 0 \quad \text{für } i=1,2,\dots,2r \quad \text{und } k=0,1,\dots,m$$

gilt : $S_1\varphi \in C^{m, \mu}(\Gamma)$ und $(S_1\varphi)^{(k)} = S_1\varphi^{(k)}$ für $k=0,1,$

$\dots, m$. Dabei wurde $(S_1\varphi)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau, t \in \Gamma$, gesetzt.

Hilfssatz 5.5 : Sei m eine natürliche Zahl, $p > 1$ und Γ wie in Folgerung 5.4. Auf den $(l+r)$ Kurven von Γ mögen s innere Punkte c_i , $i=2r+1, 2r+2, \dots, 2r+s$, ausgewählt worden sein. Ferner sei zu jedem Punkt c_i , $i=1,2,\dots,2r+s$, eine Zahl $\gamma_i \in (0, p-1)$ vorgegeben. Als Gewichtsfunktion werde

$$\rho(t) := \prod_{i=1}^{2r+s} |t-c_i|^{\gamma_i}, \quad t \in \Gamma$$

genommen und Π_λ sei der durch

$$(\Pi_\lambda \varphi)(t) := P_\lambda(t) \varphi(t), \quad t \in \Gamma, \quad \varphi \in W_p^m(\Gamma, \rho),$$

$$P_\lambda(t) := \rho^{\frac{\lambda}{p}}(t) \prod_{i=1}^{2r+s} (t-c_i)^m, \quad t \in \Gamma, \quad \lambda \in [0, \frac{p}{p-1}]$$

auf dem Raum $W_p^m(\Gamma, \rho)$ definierte Multiplikationsoperator. Dann ist $S_1 \Pi_\lambda$ ein linearer, beschränkter Operator, der den Banachraum $W_p^m(\Gamma, \rho)$ in den Banachraum $W_p^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ abbildet und für beliebiges $\varphi \in W_p^m(\Gamma, \rho)$ gelten die Gleichungen

$$(S_1 \Pi_\lambda \varphi)^{(k)} = S_1 (\Pi_\lambda \varphi)^{(k)}, \quad k=1,2,\dots,m. \quad (6)$$

Beweis : Sei $\varphi \in W_p^m(\Gamma, \rho)$. Offensichtlich gilt, da $P_\lambda \in C^m(\Gamma)$ ist,

$$|(P_\lambda \varphi)^{(k)}(t)| \leq \sum_{v=0}^k M_v \rho^{\frac{\lambda}{p}}(t) |\varphi^{(v)}(t)|, \quad t \in \Gamma, \quad k=0,1,\dots,m,$$

wobei M_v ($v=0,1,\dots,m$) Konstanten sind, die nicht von φ abhängen. Folglich haben wir

$$\|(\Pi_\lambda \varphi)^{(k)}\|_{p, \rho^{1-\lambda}} \leq \sum_{v=0}^k M_v \|\varphi^{(v)}\|_{p, \rho} \leq M_m^1 \|\varphi\|_{W_p^m} \quad (7)$$

für $k=0,1,\dots,m$ mit $M_m^1 := \max \{M_0, M_1, \dots, M_m\}$.

Wegen $\varphi \in W_p^m(\Gamma, \rho)$ konvergiert nach Folgerung 3.8 die Folge der Mittelungsfunktionen $\varphi_{(n)}$ in der Norm des Raumes $W_p^m(\Gamma, \rho)$ gegen φ . Also konvergiert $\Pi_\lambda \varphi_{(n)}$ gegen $\Pi_\lambda \varphi$ in der Norm des Raumes $W_p^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$, d.h. es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Pi_\lambda (\varphi_{(n)} - \varphi)\|_{W_p^m, \rho^{1-\lambda}} = 0. \quad (8)$$

Wir setzen jetzt $\psi := S_1 \Pi_\lambda \varphi$ und $\psi_{[n]} := S_1 \Pi_\lambda \varphi_{(n)}$ für $n=1,2,\dots$. Dann gilt nach Folgerung 5.4

$$\psi_{[n]}^{(k)} := S_1 (\Pi_\lambda \varphi_{(n)})^{(k)} \quad \text{für } k=0,1,\dots,m, \quad n=1,2,\dots \quad (9)$$

Nach [7] Seite 24, Theorem 5 ist S_1 im Raume $L_p(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ beschränkt. (10)

Damit ergibt sich aus (8) und (9) sofort

$$\|S_1 (\Pi_\lambda \varphi)^{(k)} - \psi_{[n]}^{(k)}\|_{p, \rho^{1-\lambda}} \leq \|S_1\| \cdot \|(\Pi_\lambda \varphi - \Pi_\lambda \varphi_{(n)})^{(k)}\|_{p, \rho^{1-\lambda}} \rightarrow 0 \quad (11)$$

für $k=0,1,\dots,m$ und $n=1,2,\dots$.

Mit (11) sind alle Forderungen der Definition 2 aus [13] (Nr.109) erfüllt. Also ist $S_1 (\Pi_\lambda \varphi)^{(k)}$ die k -te verallgemeinerte Ableitung der Funktion $S_1 \Pi_\lambda \varphi$, d.h. Formel (6) ist damit bewiesen.

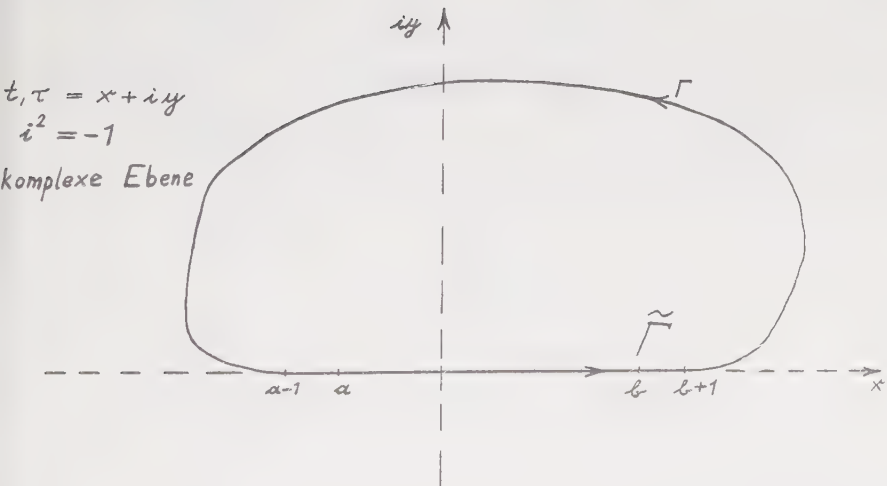
Aus (6), (7) und (10) ergibt sich noch

$$\|\psi_{[n]}^{(k)}\|_{p, \rho^{1-\lambda}} = \|S_1 (\Pi_\lambda \varphi_{(n)})^{(k)}\|_{p, \rho^{1-\lambda}} \leq \|S_1\| \cdot \|(\Pi_\lambda \varphi)^{(k)}\|_{p, \rho^{1-\lambda}} \leq$$

$$\leq M'_m \|S_1\| \cdot \|\varphi\|_{W_{p,\rho}^m} \quad \text{für } k=0,1,\dots,m, \quad \text{also gilt:}$$

$$\|S_1 \Pi_\lambda \varphi\|_{W_{p, \rho}^m}^{1-\lambda} \leq (m+1) M_m' \|S_1\| \cdot \|\varphi\|_{W_{p, \rho}^m}.$$

Folglich ist $\|S_1 \Pi_\lambda\| \leq (m+1) M'_m \|S_1\| < \infty$. Q.e.d.



Skizze zu Hilfssatz 6.1

(siehe Fussnote auf der Seite 66)

6. Abschnitt

DIE VOLLSTETIGKEIT DES OPERATORS $[S A - A S]$:

Hilfssatz 6.1 : Sei m eine nicht negative ganze Zahl ,
 $\alpha, \beta, \mu \in (0, 1)$, $p > 1$, $\rho(t) := |t-a|^{\alpha(p-1)} |b-t|^{\beta(p-1)}$ für $t \in [a, b]$
 und $c \in C^{m, \mu}[a, b]$. Dann bildet der Operator $\mathfrak{R} := [S_1 c - c S_1]$,

$$(\mathfrak{R}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{c(\tau) - c(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau , \quad t \in [a, b] , \quad \varphi \in L_p([a, b], \rho) ,$$

den Banachraum $L_p([a, b], \rho)$ vollstetig in den Banachraum
 $W_p^m([a, b], \rho)$ ab . Falls für die Funktion c und für jedes $\delta \in (0, 1-\mu)$
 sogar $c \in C^{m, 1-\delta}[a, b]$ gilt , ist $\mathfrak{R}$ ein vollstetiger Operator von
 $L_p([a, b], \rho)$ in $W_p^m([a, b], \rho^{1-\lambda})$ für jedes $\lambda \in [0, \frac{p}{p-1}]$.

Beweis : Die Strecke $[a-1, b+1]$ sei durch eine den Punkt $(b+1)$
 mit dem Punkt $(a-1)$ verbindende (offene) , nicht geschlossene
 Kurve Γ so zu einer einfachen , geschlossenen $C^{m+1, \mu}$ -Kurve $\tilde{\Gamma}$ ergänzt ,
 dass das endliche Gebiet , das von $\tilde{\Gamma}$ berandet wird , beim Durchlaufen
 in positiver Richtung von $\tilde{\Gamma}$ (und Γ) auf der linken Seite von $\tilde{\Gamma}$
 liegt^{*)}. Nun sei die Funktion c von der Strecke $[a, b]$ auf $\tilde{\Gamma}$ so fort-
 gesetzt , dass die Fortsetzung $\tilde{c}$ von c in dem Raum $C^{m, \mu}(\tilde{\Gamma})$ liegt .

Wir setzen :

$$K(t, \tau) := \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{c(\tau) - c(t)}{\tau - t} , \quad t, \tau \in [a, b] ,$$

$$\tilde{K}(t, \tau) := \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{\tilde{c}(\tau) - \tilde{c}(t)}{\tau - t} , \quad t, \tau \in \tilde{\Gamma} ,$$

$$\hat{\rho}(t) := |t-a|^{\alpha(p-1)} |b-t|^{\beta(p-1)} , \quad t \in [a-1, b+1]$$

$$\text{und} \quad \psi(t) := \int_a^b K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau , \quad t \in [a, b] , \quad \varphi \in L_p([a, b], \rho) .$$

Offensichtlich gilt :

$$\tilde{K}(t, \tau) = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{1}{\tau - t} \int_t^\tau \tilde{c}'(v) dv = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \tilde{c}'(t + [\tau - t]u) du , \quad t, \tau \in [a-1, b+1]$$

und wir zeigen zunächst , dass $\psi \in W_1^m[a, b]$ und

^{*)} siehe Skizze auf der Seite 65

$$\psi^{(k)}(t) = \int_a^b K_t^{(k)}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b], \quad k=1, 2, \dots, m \quad (1)$$

gilt. Für $k=1, 2, \dots, (m-1)$ folgen die Gleichungen (1) auf Grund bekannter Eigenschaften von Parameterintegralen (vergl. z.B. [29] oder [30]) unmittelbar aus der Stetigkeit der Funktionen

$$\tilde{K}_t^{(k)}|_{[a, b] \times [a, b]}, \quad k=1, 2, \dots, m-1, \quad \text{wobei}$$

$$\tilde{K}_t^{(k)}(t, \tau) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 (1-u)^k \tilde{c}^{(k+1)}(t + [\tau - t]u) du, \quad t, \tau \in [a-1, b+1] \quad (2)$$

für $k=1, 2, \dots, m-1$ gilt. Um (1) auch für $k=m$ zu beweisen, konstruieren wir zu $\tilde{\varphi}$,

$$\tilde{\varphi}(\tau) := \begin{cases} \varphi(\tau) & \text{für } \tau \in [a, b] \\ 0 & \text{für } \tau \in \tilde{\Gamma} \setminus [a, b] \end{cases},$$

die Folge der Mittelungsfunktionen $\tilde{\varphi}_n \in C^\infty(\tilde{\Gamma})$

$$\tilde{\varphi}_n(t) = \begin{cases} n \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} \tilde{\varphi}(\sigma) \omega(n|\sigma-t|) d\sigma & \text{für } t \in [a-\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}] \\ 0 & \text{für } t \in \tilde{\Gamma} \setminus [a-\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}] \end{cases} \quad \text{für } n=2, 3, \dots$$

Ausserdem setzen wir:

$$\tilde{\Phi}_{(n)}(t) := \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{K}_t^{(m-1)}(t, \tau) \tilde{\varphi}_n(\tau) d\tau, \quad t \in \tilde{\Gamma}, \quad n=2, 3, \dots,$$

$$\Phi_{(n)} := \tilde{\Phi}_{(n)}|_{[a, b]}, \quad n=2, 3, \dots, \quad \text{und}$$

$$\chi(t) := \oint_{\tilde{\Gamma}} \tilde{K}_t^{(m)}(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b].$$

In [1] auf Seite 67 wurde gezeigt, dass

$$\tilde{\Phi}'_{(n)}(t) = \oint_{\tilde{\Gamma}} \tilde{K}_t^{(m)}(t, \tau) \tilde{\varphi}_n(\tau) d\tau, \quad t \in \tilde{\Gamma}, \quad n=2,3,\dots \quad \text{gilt.}$$

Durch Einschränkung der Funktion $\tilde{\Phi}'_{(n)}$ von $\tilde{\Gamma}$ auf $[a, b]$ erhält man

$$\Phi'_{(n)}(t) = \oint_{a-1}^{b+1} \tilde{K}_t^{(m)}(t, \tau) \varphi_n(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b], \quad n=2,3,\dots \quad (3)$$

$$\text{Nun ist } \tilde{K}_t^{(m-1)}(t, \tau) = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{1}{(\tau-t)^m} \int_t^\tau (\tau-v)^{m-1} \tilde{c}^{(m)}(v) dv \quad \text{für}$$

$t, \tau \in [a-1; b+1]$ und

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t^{(m)}(t, \tau) &= \frac{m}{\pi i} (\tau-t)^{-m-1} \int_t^\tau (\tau-v)^{m-1} \tilde{c}^{(m)}(v) dv - \frac{1}{\pi i} \frac{\tilde{c}^{(m)}(t)}{\tau-t} = \\ &= \frac{m}{\pi i} \int_0^1 (1-u)^{m-1} \frac{\tilde{c}^{(m)}(t + [\tau-t]u) - \tilde{c}^{(m)}(t)}{\tau-t} du, \quad t, \tau \in [a-1, b+1]. \quad (4) \end{aligned}$$

Wegen $\tilde{c}^{(m)} \in H^\mu[a-1, b+1]$ können wir sofort abschätzen:

$$\begin{aligned} |\tilde{K}_t^{(m)}(t, \tau)| &\leq \frac{m}{\pi} \int_0^1 (1-u)^{m-1} \left| \frac{\tilde{c}^{(m)}(t + [\tau-t]u) - \tilde{c}^{(m)}(t)}{\tau-t} \right| du \leq \\ &\leq C_1 |\tau-t|^{\mu-1} \quad \text{für } t, \tau \in [a-1, b+1]. \quad (5) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Integraltransformation $\hat{\mathfrak{K}}_m$,

$$\eta(t) = (\hat{\mathfrak{K}}_m \hat{\xi})(t) := \int_{a-1}^{b+1} \tilde{K}_t^{(m)}(t, \tau) \hat{\xi}(\tau) d\tau, \quad \begin{array}{l} \hat{\xi} \in L_p([a-1, b+1], \hat{\rho}), \\ t \in [a, b] \end{array}$$

den Raum $L_p([a-1, b+1], \hat{\rho})$ stetig in den Raum $L_1[a, b]$ abbildet,

d.h.

$$\|\eta\|_1 \leq C_5 \|\hat{\xi}\|_{p, \hat{\rho}} \quad (6)$$

gilt für $\hat{\xi} \in L_p([a-1, b+1], \hat{\rho})$, wobei C_5 unabhängig von $\hat{\xi}$ ist. Denn aus (5) folgt sofort, dass

$$|\eta(t)| \leq C_1 \int_{a-1}^{b+1} \frac{|\hat{\xi}(\tau)|}{|\tau-t|^{1-\mu}} d\tau = C_1 \int_{a-1}^{b+1} \frac{|\hat{\xi}(\tau)| \hat{\rho}^{\frac{1}{p}}(\tau) \cdot \hat{\rho}^{-\frac{1}{p}}(\tau)}{|\tau-t|^{\frac{1-\mu}{p}} |\tau-t|^{\frac{1-\mu}{q}}} d\tau$$

mit $q = \frac{p}{p-1}$ und daher auch

$$|\eta(t)|^p \leq C_1^p \int_{a-1}^{b+1} \frac{|\hat{\xi}(\tau)|^p \hat{\rho}(\tau) d\tau}{|\tau-t|^{1-\mu}} \cdot \left(\int_{a-1}^{b+1} \frac{d\tau}{|\tau-t|^{1-\mu} |\tau-a|^\alpha |b-\tau|^\beta} \right)^{p-1}$$

gilt für $t \in [a, b]$. Andererseits ist

$$|t-a|^\alpha |b-t|^\beta \int_{a-1}^{b+1} \frac{d\tau}{|\tau-t|^{1-\mu} |\tau-a|^\alpha |b-\tau|^\beta} \leq C_2 \quad \text{für } t \in [a, b],$$

$$\int_a^b \frac{dt}{|\tau-t|^{1-\mu}} \leq C_3 \quad \text{für } \tau \in [a-1, b+1] \quad \text{und} \quad \|\rho^{-\frac{1}{p}}\|_{\frac{p}{p-1}}^p \leq C_4.$$

Wir haben somit

$$\begin{aligned} \|\eta\|_1^p &= \|\eta \rho^{\frac{1}{p}} \rho^{-\frac{1}{p}}\|_1^p \leq \|\eta\|_{p, \rho}^p \cdot \|\rho^{-\frac{1}{p-1}}\|_1^{p-1} \leq \\ &\leq C_1^p C_2^{p-1} C_4 \int_a^b \int_{a-1}^{b+1} \frac{|\hat{\xi}(\tau)|^p \hat{\rho}(\tau)}{|\tau-t|^{1-\mu}} d\tau dt = \\ &= C_1^p C_2^{p-1} C_4 \int_{a-1}^{b+1} \int_a^b \frac{|\hat{\xi}(\tau)|^p \hat{\rho}(\tau)}{|\tau-t|^{1-\mu}} dt d\tau \leq C_1^p C_2^{p-1} C_3 C_4 \|\hat{\xi}\|_{p, \hat{\rho}}^p, \end{aligned}$$

also (6) mit $C_5 := (C_1^p C_2^{p-1} C_3 C_4)^{\frac{1}{p}}$.

Aus der Stetigkeit von $\tilde{K}_t^{(m-1)}$ folgt unmittelbar noch, dass

$$\|\xi\|_1 \leq C_6 \|\hat{\xi}\|_{p, \hat{\rho}} \quad (7)$$

$$\text{für } \zeta(t) := \int_{a-1}^{b+1} \tilde{K}_t^{(m-1)}(t, \tau) \hat{\xi}(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b],$$

$\hat{\xi} \in L_p([a-1, b+1], \hat{\rho})$, gilt.

Aus (7), (3) und (6) folgt nun nach Hilfssatz 3.2 sofort:

$$\left. \begin{aligned} \|\psi^{(m-1)} - \Phi_{(n)}\|_1 &\leq C_6 \|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_n\|_{p, \hat{\rho}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \\ \text{und } \|\chi - \Phi'_{(n)}\|_1 &\leq C_5 \|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_n\|_{p, \hat{\rho}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Mit (8) sind alle Forderungen der Definition 2 aus [13] (Nr.109) erfüllt. Damit ist $\psi^{(m-1)} \in W_1^m[a, b]$ und χ ist die verallgemeinerte Ableitung von $\psi^{(m-1)}$. Die Gleichung (1) gilt demnach für alle $k=0, 1, 2, \dots, m$.

Wir setzen jetzt voraus, dass für jedes $\delta \in (0, 1-\mu)$ gilt:

$$c \in C^{m, 1-\delta}[a, b] \quad (9)$$

und beweisen, dass dann der Operator $R := [S_1 c - c S_1]$ den Raum $L_p([a, b], \rho)$ vollstetig in den Raum $W_p^m([a, b], \rho^{1-\lambda})$ für jedes $\lambda \in [0, \frac{p}{p-1}]$ abbildet. Dazu betrachten wir die Operatoren $\mathfrak{M}_k$,

$$(\mathfrak{M}_k x)(t) := \int_a^b \rho^{\frac{1-\lambda}{p}}(t) K_t^{(k)}(t, \tau) \rho^{-\frac{1}{p}}(\tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b],$$

$k=0, 1, \dots, m$, $x \in L_p[a, b]$. Wegen unserer einschränkenden Voraussetzung (9) gilt an Stelle von (5) für hinreichend kleines $\delta > 0$:

$$|K_t^{(k)}(t, \tau)| \leq C_0 |\tau - t|^{-\delta} \quad \text{für } t, \tau \in [a, b] \text{ und } k=0, 1, \dots, m.$$

Wir wählen $\delta_0 := \frac{1}{2} \min\{1-\alpha, 1-\beta, \frac{p-1}{2p}\}$. Offensichtlich ist dann:

$$\left(\int_a^b \left[\int_a^b \left| \rho^{\frac{1-\lambda}{p}}(t) \frac{C_0}{|\tau-t|^{\delta_0}} \rho^{-\frac{1}{p}}(\tau) \right|^{\frac{p}{p-1}} d\tau \right]^{p-1} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{für } \lambda \in [0, \frac{p}{p-1}].$$

Damit erfüllen die $\mathfrak{M}_k$, $k=0, 1, \dots, m$ die Bedingungen (12) der Bemerkung, die sich an Theorem 2(2.X) in [12] anschliesst. Folg-

lich sind die $\mathbb{M}_k$, $k=0,1,\dots,m$ vollstetige Integraloperatoren vom Raume $L_p[a,b]$ in sich (vergl. auch [21] Seite 125 : Mit $\tau=0$, $\alpha(0) = \beta(0) = \frac{1}{p}$, $r^* = q^* = 1$, $r = 1 - \frac{1}{p}$, $q = \frac{1}{p}$, q in der Bezeichnung von [21], sind alle Voraussetzungen des Satzes 7.1 von [21] erfüllt.)

Somit sind die Operatoren $\frac{\lambda-1}{p} \frac{1}{p} \mathbb{M}_k p^{\frac{1}{p}} I$,

$$(\frac{\lambda-1}{p} \mathbb{M}_k p^{\frac{1}{p}} \varphi)(t) := \int_a^b K_t^{(k)}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = (\frac{d}{d\tau})^k \int_a^b K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

$t \in [a, b]$, $\varphi \in L_p([a, b], \rho)$, $\lambda \in [0, \frac{p}{p-1}]$, $k=0,1,\dots,m$, $\frac{\lambda-1}{p}$ vollstetig vom Raum $L_p([a, b], \rho)$ in $L_p([a, b], \rho^{1-\lambda})$, denn $\rho^{\frac{\lambda-1}{p}}$ bzw. $\rho^{\frac{1}{p}}$ (vergl. Bemerkung 1.2) ist eine Isometrie des Banachraumes $L_p[a, b]$ auf $L_p([a, b], \rho^{1-\lambda})$ bzw. von $L_p([a, b], \rho)$ auf $L_p[a, b]$. Nun sei M eine beschränkte Menge im Raum $L_p([a, b], \rho)$ und $\psi_v := \mathbb{R} \varphi_v$ ($\varphi_v \in M$) eine beliebige Folge von Elementen der Bildmenge $\mathbb{R}(M)$.¹⁰⁾ Auf Grund der soeben bewiesenen Vollstetigkeit der Operatoren $\frac{\lambda-1}{p} \frac{1}{p} \mathbb{M}_k p^{\frac{1}{p}} I$, $k=0,1,\dots,m$, lässt sich

aus der Folge $\{\psi_v\}_{v=1}^\infty$ eine Teilfolge $\{\psi_v\}_{\mu=1}^\infty$ auswählen, die eine Fundamentalfolge des Raumes $W_p^m([a, b], \rho^{1-\lambda})$ darstellt. Wegen der Vollständigkeit von $W_p^m([a, b], \rho^{1-\lambda})$ ist dann $\{\psi_v\}_{\mu=1}^\infty$ auch eine in $W_p^m([a, b], \rho^{1-\lambda})$ konvergente Folge. Falls die Funktion c für jedes $\delta \in (0, 1-\mu)$ der Bedingung $c \in C^{m, 1-\delta}[a, b]$ genügt, dann wäre dieser Hilfssatz 6.1 schon bewiesen.

Es sei nun $c \in C^{m, \mu}[a, b]$ und eine Zahl $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach Folgerung 5.2 existiert eine Folge $\{c_v\}_{v=1}^\infty$ von Elementen $c_v \in C^{m, 1}[a, b]$ mit:

10) Der Kürze halber sei die Bildmenge von M nach der Operation $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}(M)$ bezeichnet.

$\lim_{v \rightarrow \infty} \|c_v - c\|_{C^{m,\mu}_{[a,b]}} = 0$. Es existiert also eine

Zahl $N > 0$, so dass für jede natürliche Zahl $v > N$ gilt :

$$\|c_v - c\|_{C^{m,\mu}_{[a,b]}} < \frac{\varepsilon}{m(m+1)\|K_{1-\mu}\|} , \quad (10)$$

dabei ist $\|K_{1-\mu}\|$ die Norm des im Raume $L_p([a,b],\rho)$ stetigen (vergl. [7] Kap.I) Operators $K_{1-\mu}$,

$$(K_{1-\mu}\varphi)(t) := \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{|\tau-t|^{1-\mu}} d\tau , \quad t \in [a,b], \quad \varphi \in L_p([a,b],\rho).$$

Wir setzen nun : $K_v(t,\tau) := \frac{1}{\pi i} \frac{c_v(\tau) - c_v(t)}{\tau - t}$ und

$$(\mathfrak{K}_v\varphi)(t) := \int_a^b K_v(t,\tau) \varphi(\tau) d\tau$$

für $t, \tau \in [a,b]$, $\varphi \in L_p([a,b],\rho)$ und $v=1,2,\dots$.

Jedes $\mathfrak{K}_v$ ist nach dem oben Bewiesenen vollstetig von $L_p([a,b],\rho)$ in $W_p^m([a,b],\rho^{1-\lambda})$, also erst recht vollstetig in den Raum $W_p^m([a,b],\rho)$. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass gilt :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \|\mathfrak{K}_v - \mathfrak{K}\| = 0 \quad (11)$$

Die Formel (11) ist aber, wenn wir den Raum $W_p^m([a,b],\rho)$ als Bildraum für $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_v$ annehmen, äquivalent mit der Existenz einer natürlichen Zahl N_1 , so dass

$$\|(\mathfrak{K}_v - \mathfrak{K})\varphi\|_{W_p^m} < \varepsilon \|\varphi\|_{p,\rho} \quad (12)$$

gilt für jedes $v > N_1$ und jedes $\varphi \in L_p([a,b],\rho)$.

Für $k=1,2,\dots,m$ und $v=1,2,\dots$ betrachten wir also :

$$\begin{aligned}
 & \| (R_v \varphi - R \varphi)^{(k)} \|_{p,p} = \\
 & = \left\{ \int_a^b \rho(t) \left| \int_a^b \int_0^1 \frac{\{c_v^{(k)}(t+[\tau-t]u) - c^{(k)}(t+[\tau-t]u)\} - \{c_v^{(k)}(t) - c^{(k)}(t)\}}{\tau - t} \right. \right. \\
 & \times \left. \frac{k}{\pi I} (1-u)^{k-1} \varphi(\tau) du d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} dt \leq \\
 & \leq \left\{ \int_0^1 \left(\frac{k}{\pi}\right)^p (1-u)^{p(k-1)} \int_a^b \rho(t) \left[\int_a^b u^\mu \cdot \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau-t|^{1-\mu}} \right. \right. \\
 & \left. \left(\times \frac{|\{c_v^{(k)}(t+u[\tau-t]) - c^{(k)}(t+u[\tau-t])\} - \{c_v^{(k)}(t) - c^{(k)}(t)\}|}{|t+[\tau-t]u - t|^\mu} d\tau \right)^p dt du \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\
 & \leq \left\{ \int_0^1 k^p (1-u)^{p(k-1)} \int_a^b \rho(t) \left[\int_a^b u^\mu \cdot \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau-t|^{1-\mu}} \cdot \frac{\varepsilon}{m(m+1) \|K_{1-\mu}\|} d\tau \right]^p dt du \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\
 & \leq \frac{\varepsilon}{m+1} \left\{ \int_a^b \rho(t) \left[\int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau-t|^{1-\mu}} \cdot \frac{1}{\|K_{1-\mu}\|} d\tau \right]^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{m+1} \|\varphi\|_{p,p}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Etwas einfacher als für $k=1,2,\dots,m$ ist die Formel (13) für $k=0$ zu beweisen. Aus (13) für $k=0,1,2,\dots,m$ und (10) folgt sofort (12) für $N_1 := N$. Q.e.d.

Bemerkung 6.2 : Eine genauere Analyse als die im letzten Beweis durchgeführte - mit etwas schärferen Abschätzungen analog denen von Michlin (1948, in [7] zitiert) durchgeführten - legt die Vermutung nahe, dass der Satz 6.1 sogar für beliebiges $c \in C^m(\Gamma)$ richtig ist. Dass dies dann aber die grösstmögliche Erweiterung der Voraussetzungen unseres Satzes ist, geht andererseits aus dem Ergebnis von Gordadse hervor. Gordadse zeigt in [37], dass der Operator $[Sc - cS] : L_p([a,b], \rho) \rightarrow L_p([a,b], \rho)$ in dem Spezialfall : $a=0$, $b=2$, ρ wie in Folgerung 3.7 und

$$c(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, 1] \\ 2 & \text{für } t \in (1, 2] \end{cases},$$

nicht vollstetig ist. 11)

Hilfssatz 6.3 : Sei m eine nicht negative ganze Zahl, $\alpha, \beta, \mu \in (0, 1)$, $p > 1$, $\rho(t) := (t-a)^{\alpha(p-1)}(b-t)^{\beta(p-1)}$ für $t \in [a, b]$, $\lambda \in [0, \frac{p}{p-1}]$ und $c \in C^{m, \mu}[a, b]$. Dann bildet der Operator $[S_1 \Pi_\lambda c - c \Pi_\lambda S_1]$,

$$([S_1 \Pi_\lambda c - c \Pi_\lambda S_1] \varphi)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{P_\lambda(\tau) c(\tau) - P_\lambda(t) c(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b],$$

$\varphi \in L_p([a, b], \rho)$, den Banachraum $L_p([a, b], \rho)$ vollstetig in den Banachraum $W_p^m([a, b], \rho^{1-\lambda})$ ab. Dabei bedeutet:

$$P_\lambda(t) := \rho^{\frac{\lambda}{p}}(t) (t-a)^m (b-t)^m, \quad t \in [a, b].$$

Beweis : Da der Hilfssatz 6.3 für den speziellen Fall $\lambda=0$ schon durch den Hilfssatz 6.1 bewiesen ist, beschränken wir uns im weiteren auf $\lambda \in (0, \frac{p}{p-1}]$. Ausserdem lässt die Umformung

$$S_1 \Pi_\lambda c I - c \Pi_\lambda S_1 = [S_1 \Pi_\lambda I - \Pi_\lambda S_1] c I + \Pi_\lambda [S_1 c I - c S_1] \quad (14)$$

erkennen, dass nur noch die Vollstetigkeit des Operators

$$R := [S_1 \Pi_\lambda I - \Pi_\lambda S_1],$$

$$(R\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{P_\lambda(\tau) - P_\lambda(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b], \quad \varphi \in L_p([a, b], \rho),$$

von $L_p([a, b], \rho)$ in $W_p^m([a, b], \rho^{1-\lambda})$ gezeigt werden muss, denn nach Hilfssatz 6.1 bildet der Operator, der in der letzten eckigen Klammer von (14) eingeschlossen ist, den Raum $L_p([a, b], \rho)$ in $W_p^m([a, b], \rho)$ vollstetig ab und Π_λ ist eine lineare stetige Abbildung von $W_p^m([a, b], \rho)$ in $W_p^m([a, b], \rho^{1-\lambda})$.

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt*) aus der Formel (1) unter Beachtung der Formel (4) sofort :

11) Das Ergebnis von Gordadse in [37] zeigt ausserdem, dass der Satz 1 von Chvedelidse in [76] falsch ist.

*) vergleiche auch Anhang 8.2.3. auf der Seite 113

$$(\Re \varphi)^{(k)}(t) := \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{P_{\lambda}^{(k)}(\sigma) - P_{\lambda}^{(k)}(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b], \quad (15)$$

$\varphi \in L_p([a, b], \rho)$, $k=0, 1, \dots, m$, wobei σ zwischen τ und t liegt und für festes t von τ abhängt. Speziell für $k=0$ gilt natürlich $\sigma=\tau$.

Wir setzen $\eta := \alpha + \delta$ und $\eta' := \beta + \delta'$, wobei die Grössen $\delta > 0$, $\delta' > 0$ hinreichend klein gewählt seien, so dass die folgenden Forderungen:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\lambda}{q} + \delta(p-1) &< 1, & \eta &< 1, \\ \frac{\beta\lambda}{q} + \delta'(p-1) &< 1, & \eta' &< 1 \end{aligned} \quad (q := \frac{p}{p-1}) \quad (16)$$

alle erfüllt sind. Dann führen wir noch die Grössen κ_0 und κ'_0 ein:

$$\kappa_0 := 1 - \frac{\alpha\lambda}{q} \quad \text{und} \quad \kappa'_0 := 1 - \frac{\beta\lambda}{q}.$$

Für diese gilt stets:

$$\begin{aligned} \kappa_0 &< 1, & \kappa_0 + \eta &> 1, \\ \kappa'_0 &< 1 \quad \text{und} \quad \kappa'_0 + \eta' &> 1, \end{aligned} \quad (17)$$

weil $\alpha, \beta \in (0, 1)$ und $\lambda \in (0, q]$ ist. Ausserdem benutzen wir die Abkürzungen: $N_0 := \frac{q}{\lambda} \max \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \right\}$,

$$A(t) := (t-a)^{m+\frac{\alpha\lambda}{q}} \quad \text{und} \quad B(t) := (b-t)^{m+\frac{\beta\lambda}{q}} \quad \text{für } t \in [a, b],$$

$$L_{[p]} := L_p\left([a, \frac{a+b}{2}], \rho\left|[a, \frac{a+b}{2}]\right.\right), \quad L_{(p)} := L_p\left([a, \frac{a+2b}{3}], \rho\left|[a, \frac{a+2b}{3}]\right.\right)$$

$$\text{und } L_{[p]} := L_p\left([a, \frac{a+2b}{3}], \rho^{1-\lambda}\left|[a, \frac{a+2b}{3}]\right.\right).$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen eine hinreichend grosse Zahl n , die alle folgenden 9 Bedingungen erfüllt:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(b-t)^{(1-\lambda)\beta(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa_0} \cdot (t-a)^{\frac{\alpha\lambda}{q} + \delta(p-1)}} dt < \frac{\varepsilon^p}{C_5^p C_6^p} \cdot (\tau-a)^{-\delta(p-1)}, \quad t \in (a, b], \quad (18)$$

$$\int_{b-\frac{1}{n}}^b \frac{(t-a)^{(1-\lambda)\alpha(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa'_0} \cdot (b-t)^{\frac{\beta\lambda}{q} + \delta'(p-1)}} dt < \frac{\varepsilon^p}{C_5^p C_6^p} \cdot (b-\tau)^{-\delta'(p-1)}, \quad t \in (a, b), \quad (18a)$$

$$n > N_0, \quad (19)$$

$$\frac{\alpha\lambda}{q} + (\delta + \frac{1}{n})(p-1) < 1 \quad \text{und} \quad \frac{\beta\lambda}{q} + (\delta' + \frac{1}{n})(p-1) < 1, \quad (20)$$

$$\text{falls } \frac{\beta\lambda}{q} > \alpha \text{ ist, dann sei } \frac{\beta\lambda}{q} > \alpha + \frac{1}{n} \text{ erfüllt,} \quad (20a)$$

$$\text{falls } \frac{\beta\lambda}{q} + (1-\lambda)\alpha(p-1) > 0, \text{ dann sei } \frac{\beta\lambda}{q} + (1-\lambda)\alpha(p-1) > \frac{1}{n} \text{ wahr,} \quad (20b)$$

$$\text{falls } \frac{\alpha\lambda}{q} > \beta \text{ ist, dann sei } \frac{\alpha\lambda}{q} > \beta + \frac{1}{n} \text{ erfüllt und endlich,} \quad (20c)$$

$$\text{falls } \frac{\alpha\lambda}{q} + (1-\lambda)\beta(p-1) > 0, \text{ dann sei } \frac{\alpha\lambda}{q} + (1-\lambda)\beta(p-1) > \frac{1}{n} \text{ erfüllt.} \quad (20d)$$

(Die dabei auftretenden Konstanten C_5 und C_6 sind auf Seite 79 erklärt. Die Konstanten C'_5 und C'_6 ergeben sich aus C_5 und aus C_6 durch sinngemäßes Vertauschen von: $a, \alpha, \kappa, \delta$ und η mit: $b, \beta, \kappa', \delta'$ und η' .) . Eine solche Zahl n existiert stets auf Grund der Abso-
lutstetigkeit der Integrale, die in (18) und (18a) vorkommen.
Ausserdem lässt sich (20) wegen (16) leicht erfüllen. Wir setzen
 $\kappa := \kappa_0 + \frac{1}{n}$ und $\kappa' := \kappa'_0 + \frac{1}{n}$. Aus der Beziehung (19) folgt,
dass $\kappa < 1$ und $\kappa' < 1$ ist. Dann gilt noch $\kappa + \eta > 1$ und $\kappa' + \eta' > 1$
wegen (17) . Man beachte nun, dass

$A \in C^{m, \frac{\alpha\lambda}{q} - \frac{1}{n}}[a, b]$ und $B \in C^{m, \frac{\beta\lambda}{q} - \frac{1}{n}}[a, b]$ ist. Daher existie-
ren nach Folgerung 5.2 zwei Folgen $(A_v)_{v=1}^\infty$, $(B_v)_{v=1}^\infty$ und zwei
Zahlen $N_a(\varepsilon)$, $N_b(\varepsilon)$ mit den Eigenschaften:

$$A_v \in C^{m, 1}[a, b], \quad \|A_v\|_{C^{m, \frac{\alpha\lambda}{q}}[a, b]} < 2 \cdot \|A\|_{C^{m, \frac{\alpha\lambda}{q}}[a, b]} =: \frac{2}{3} C_6 \quad (21)$$

$$\text{und } \|A_v - A\|_{C^{m, \frac{\alpha\lambda}{q} - \frac{1}{n}}[a, b]} < \frac{\varepsilon}{C_5 + C'_5} \quad \text{für } v > N_a(\varepsilon), \quad (21a)$$

$$B_v \in C^{m, 1}[a, b], \quad \|B_v\|_{C^{m, \frac{\beta\lambda}{q}}[a, b]} < 2 \cdot \|B\|_{C^{m, \frac{\beta\lambda}{q}}[a, b]} =: \frac{2}{3} C'_6 \quad (21b)$$

$$\text{und } \|B_v - B\|_{C^{m, \frac{\beta\lambda}{q} - \frac{1}{n}}[a, b]} < \frac{\varepsilon}{C'_5 + C_5} \quad \text{für } v > N_b(\varepsilon). \quad (21c)$$

(Die dabei auftretenden Konstanten C_{13} und C'_{13} sind auf der Seite
79 erklärt.) Wir können uns darauf beschränken zu zeigen, dass
der Operator $R_{k, a}$,

$$(R_{k, a} \varphi)(t) := \frac{1}{\pi I} \cdot \int_a^{a+b} \frac{P_\lambda^{(k)}(\sigma) - P_\lambda^{(k)}(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b], \quad \varphi \in L_{[p]}$$

für $k=0,1,\dots,m$ den Raum $L_{[p]}$ vollstetig in $L_p([a,b], \rho^{1-\lambda})$ abbildet, da sich die Überlegungen für den Operator $\mathfrak{R}_{k,b}$,

$$(\mathfrak{R}_{k,b}\varphi)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{P_{\lambda}^{(k)}(\sigma) - P_{\lambda}^{(k)}(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b],$$

$\varphi \in L_p([\frac{a+b}{2}, b], \rho([\frac{a+b}{2}, b]))$, für $k=0,1,\dots,m$ analog wie für $\mathfrak{R}_{k,a}$

durchführen lassen. Wir definieren jetzt:

$$(\mathfrak{M}_{k,v}\psi)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_a^{\frac{a+2b}{2}} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{A_v^{(k-1)}(\sigma) - A_v^{(k-1)}(t)}{\tau - t} B^{(l)}(\sigma) \psi(\tau) d\tau,$$

$t \in [a, \frac{a+2b}{2}]$, $\psi \in L(p)$, $v=1,2,\dots$ und $k=0,1,\dots,m$,

$$(\mathfrak{R}_{k,a,1}\psi)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_a^{\frac{a+2b}{2}} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{A^{(k-1)}(\sigma) - A^{(k-1)}(t)}{\tau - t} B^{(l)}(\sigma) \psi(\tau) d\tau,$$

$t \in [a, \frac{a+2b}{2}]$, $\psi \in L(p)$ und $k=0,1,\dots,m$,

$$(\mathfrak{R}_{k,a,2}\psi)(t) := \frac{1}{\pi i} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} A^{(k-1)}(t) \int_a^{\frac{a+2b}{2}} \frac{B^{(l)}(\sigma) - B^{(l)}(t)}{\tau - t} \psi(\tau) d\tau,$$

$t \in [a, \frac{a+2b}{2}]$, $\psi \in L(p)$ und $k=0,1,\dots,m$

$$\text{und } (\mathfrak{R}_{k,a,3}\varphi)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{P_{\lambda}^{(k)}(\sigma) - P_{\lambda}^{(k)}(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [\frac{a+2b}{2}, b],$$

$\varphi \in L_{[p]}$ und $k=0,1,\dots,m$.

Aus dem Hilfssatz 6.1 folgt, dass die Operatoren $\mathfrak{M}_{k,v}$

und $\mathfrak{R}_{k,a,2}$ den Raum $L_{(p)}$ vollstetig in den Raum $L_{(p)}$ abbilden. ^(*)

Wegen der Stetigkeit von $\frac{P_{\lambda}^{(k)}(\sigma) - P_{\lambda}^{(k)}(t)}{\tau - t}$ für

$(t, \tau) \in [a, \frac{a+b}{2}] \times [\frac{a+2b}{3}, b]$ und $k=0, 1, \dots, m$ bildet der Operator $\mathfrak{R}_{k,a,3}$ den Raum $L_{[p]}$ vollstetig in den $L_p([\frac{a+2b}{3}, b], \rho^{1-\lambda} |[\frac{a+2b}{3}, b])$ ab.

Man kann den Operator $\mathfrak{R}_{k,a}$ wie folgt darstellen:

$$(\mathfrak{R}_{k,a}\varphi)(t) := \begin{cases} (\mathfrak{M}_{k,v}\varphi_a)(t) + ([\mathfrak{R}_{k,a,1} - \mathfrak{M}_{k,v}]\varphi_a)(t) + (\mathfrak{R}_{k,a,2}\varphi_a)(t) & \text{für } t \in [a, \frac{a+2b}{3}] , \\ (\mathfrak{R}_{k,a,3}\varphi_a)(t) & \text{für } t \in (\frac{a+2b}{3}, b] , \text{ wobei} \end{cases}$$

$$\varphi_a(\tau) := \begin{cases} \varphi(\tau) & \text{für } \tau \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ 0 & \text{für } \tau \in (\frac{a+b}{2}, b] \end{cases} \text{ gesetzt wurde für } \varphi \in L_p([a, b], \rho) .$$

Wir haben also nur noch zu zeigen, dass

$$\|(\mathfrak{R}_{k,a,1} - \mathfrak{M}_{k,v})\varphi_a\|_{p,\rho^{1-\lambda}} < \varepsilon \cdot \|\varphi_a\|_{p,\rho} \quad (22)$$

für jede natürliche Zahl $v > N_a(\varepsilon)$ und $k=0, 1, \dots, m$ gilt. Zur Abschätzung der linken Seite von (22) betrachten wir den folgenden

$$\text{Ausdruck: } (\mathfrak{R}_{k,a,1}\varphi_a - \mathfrak{M}_{k,v}\varphi_a)(t) =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{[A^{(k-1)} - A_v^{(k-1)}](\sigma) - [A^{(k-1)} - A_v^{(k-1)}](t)}{\tau - t} B^{(l)}(\sigma) \varphi(\tau) d\tau .$$

$$\text{Für } t \in [a + \frac{1}{n}, b] \text{ gilt: } |(\mathfrak{R}_{k,a,1}\varphi_a - \mathfrak{M}_{k,v}\varphi_a)(t)|^p \leq$$

$$\leq \frac{(k+1)^{p-1}}{\pi^p} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \|A_v - A\|^p_{C_m, \frac{\alpha\lambda}{q} - \frac{1}{n}} \|B\|^p_{C_m, \frac{\beta\lambda}{q}} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau-t|^{\kappa}} d\tau \right]^p <$$

$$< \frac{\varepsilon^p}{C_5^p} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau-t|^{\kappa}} d\tau \right]^p = \frac{\varepsilon^p}{C_5^p} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)| (\tau-a)^{\frac{\eta}{q}}}{|\tau-t|^{\frac{\kappa}{p}}} \cdot \frac{(\tau-a)^{-\frac{\eta}{q}}}{|\tau-t|^{\frac{\kappa}{q}}} d\tau \right]^p <$$

^(*) auf der Seite 109 sind diese beiden Schlüsse ausführlich dargestellt

$$\begin{aligned}
 & < \frac{\varepsilon^p}{C_p^p} C_1 \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)|^p |\tau-a|^{\eta p}}{|\tau-t|^\kappa} d\tau \cdot \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{d\tau}{|\tau-t|^\kappa (\tau-a)^\eta} \right]^{p-1} < \\
 & < \frac{\varepsilon^p}{C_p^p} C_1 \cdot C_2^{p-1} \cdot (t-a)^{\left(\frac{\alpha\lambda}{q} - \frac{1}{n} - \alpha - \delta\right)(p-1)} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)|^p |\tau-a|^{\eta(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} d\tau \quad (22a)
 \end{aligned}$$

Dabei wurden die Konstanten $C_1 := \frac{(m+1)^{pm}}{\pi^p} \|B\|_p^p$ und $C_{m, \frac{\beta\lambda}{q}}[a, b]$

$C_2 := 2 \left(\frac{1}{1-\eta} + \frac{1}{1-\kappa_0 - \frac{1}{N_0+1}} \right)$ abgekürzt. In den weiteren Abschätzungen werden wir noch die folgenden Konstanten benötigen:

$$C_3 := 2 \left(\frac{2}{1-\kappa_0 - \frac{1}{N_0+1}} + \frac{1}{1 - \frac{\alpha\lambda}{q} - \delta(p-1) - \frac{1}{N_0+1}} + \frac{1}{1 - (\lambda-1)\beta(p-1)} \right) > 1,$$

$$C_4 := \sup_{n > N_0, \tau \in [a, \frac{a+b}{2}]} \left\{ (b-\tau)^{\frac{\alpha\lambda}{q} - \beta\lambda(p-1) - \frac{1}{n}} \frac{1}{p} + \sup_{n > N_0} \left\{ (b-a)^{\frac{\alpha\lambda}{q} + (1-\lambda)\beta(p-1) - \frac{1}{n}} \frac{1}{p} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (b-a)^{-\frac{\beta}{q}} \right\} \right\},$$

$$C_5 := 4 C_1^{\frac{1}{p}} C_2^{\frac{1}{q}} C_3^{\frac{1}{p}} C_4, \quad C_5' := 4 C_1^{\frac{1}{p}} C_2^{\frac{1}{q}} C_3^{\frac{1}{p}} C_4',$$

$$C_6 := \|A\|_{C_{m, \frac{\alpha\lambda}{q}}[a, b]}, \quad \text{wobei } A(t) = (t-a)^{m + \frac{\alpha\lambda}{q}}, \quad t \in [a, b],$$

$$C_6' := \|B\|_{C_{m, \frac{\beta\lambda}{q}}[a, b]}, \quad \text{wobei } B(t) = (b-t)^{m + \frac{\beta\lambda}{q}}, \quad t \in [a, b],$$

$$C_{10} := \frac{2}{1-\alpha} + \frac{2}{\frac{\beta\lambda}{q} - \frac{1}{N_0+1}}, \quad C_{11} := \sup_{\tau \in [a, \frac{a+2b}{3}], n > N_0} \int_a^b \frac{(t-a)^{\left(\frac{\beta\lambda}{q} - \frac{1}{n}\right)(p-1)} (b-t)^{\beta(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa_0' + \frac{1}{n}}} dt.$$

$$C_{12} := \left(\frac{3}{b-a}\right)^{\beta(p-1)}, \quad C_{13} := C_{10}^{\frac{1}{q}} C_{11}^{\frac{1}{p}} C_{12}^{\frac{1}{p}} + C_{14}^{\frac{1}{q}} C_{15}^{\frac{1}{p}} C_{12}^{\frac{1}{p}}, \quad C_{13}' := C_{10}^{\frac{1}{q}} C_{11}'^{\frac{1}{p}} C_{12}'^{\frac{1}{p}} + C_{14}'^{\frac{1}{q}} C_{15}'^{\frac{1}{p}} C_{12}'^{\frac{1}{p}},$$

$$C_{14} := \sup_{t \in [a, b], n > \frac{\beta\lambda}{q} - \frac{1}{N_0+1}} \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{(t-a)^{-\alpha}}{|\tau-t|^{1 - \frac{\beta\lambda}{q} + \frac{1}{n}}} d\tau \quad \text{für } \frac{\beta\lambda}{q} > \alpha, \quad \text{andernfalls } C_{14} := 0,$$

$$C_{15} := \sup_{\tau \in [a, \frac{a+2b}{3}], n > N_0} \int_a^b \frac{\rho(t)}{|\tau-t|^{1 - \frac{\beta\lambda}{q} + \frac{1}{n}}} dt.$$

Aus (22a) folgt:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{a+\frac{1}{n}}^b \rho^{1-\lambda}(t) |(\mathfrak{R}_{k,a,1}\varphi_a - \mathfrak{M}_{k,v}\varphi_a)(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \\ & < \frac{\varepsilon C_1^{\frac{1}{p}} C_2^{\frac{1}{q}}}{C_5} \left\{ \int_{a+\frac{1}{n}}^b (t-a)^{(1-\lambda)\alpha(p-1) + (\frac{\alpha\lambda}{q} - \frac{1}{n} - \alpha - \delta)(p-1)} \cdot (b-t)^{(1-\lambda)\beta(p-1)} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\eta(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} d\tau dt \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ & = \frac{\varepsilon C_1^{\frac{1}{p}} C_2^{\frac{1}{q}}}{C_5} \left\{ \int_a^{\frac{a+b}{2}} |\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\eta(p-1)} \int_{a+\frac{1}{n}}^b \frac{(b-t)^{(1-\lambda)\beta(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa (t-a)^{\frac{\alpha\lambda}{q} + (\frac{1}{n} + \delta)(p-1)}} dt d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (23) \end{aligned}$$

Bevor wir diesen Ausdruck zu Ende abschätzen, betrachten wir das innere Integral für sich:

$$\begin{aligned} & \int_{a+\frac{1}{n}}^b \frac{(b-t)^{(1-\lambda)\beta(p-1)} \cdot dt}{|\tau-t|^\kappa (t-a)^{\frac{\alpha\lambda}{q} + (\frac{1}{n} + \delta)(p-1)}} < \int_{a+\frac{1}{n}}^b \frac{n^{\frac{p}{n}} (b-t)^{(1-\lambda)\beta(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa (t-a)^{\frac{\alpha\lambda}{q} + \delta(p-1) - \frac{1}{n}}} dt < \\ & < 2^p \int_{a+\frac{1}{n}}^b \frac{(b-t)^{(1-\lambda)\beta(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa (t-a)^{\frac{\alpha\lambda}{q} + \delta(p-1) - \frac{1}{n}}} dt < 2^p \int_a^b \frac{(b-t)^{(1-\lambda)\beta(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa (t-a)^{\frac{\alpha\lambda}{q} + \delta(p-1) - \frac{1}{n}}} dt < \\ & < 2^p C_3 (\tau-a)^{-\delta(p-1)} \cdot \begin{cases} (b-\tau)^{\frac{\alpha\lambda}{q} + (1-\lambda)\beta(p-1) - \frac{1}{n}} & , \text{ falls } \frac{\alpha\lambda}{q} + (1-\lambda)\beta(p-1) \leq 0 \\ (b-a)^{\frac{\alpha\lambda}{q} + (1-\lambda)\beta(p-1) - \frac{1}{n}} & , \text{ falls } \frac{\alpha\lambda}{q} + (1-\lambda)\beta(p-1) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Im letzten Falle beachte man die Forderung (20d). Wenn wir diese Schranken in (23) einsetzen, dann erhalten wir:

$$\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^b \rho^{1-\lambda}(t) |(\mathfrak{R}_{k,a,1}\varphi_a - \mathfrak{M}_{k,v}\varphi_a)(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi_a\|_{p,p} \quad (24)$$

Wir schätzen nun $(\mathfrak{R}_{k,a,1}\varphi_a - \mathfrak{M}_{k,v}\varphi_a)(t)$ für $t \in [a, a + \frac{1}{n}]$ nach oben ab. Dabei benutzen wir (18), (20) und die folgende Ungleichung:

$$\left| \frac{\{A^{(k-1)} - A_v^{(k-1)}\}(\sigma) - \{A^{(k-1)} - A_v^{(k-1)}\}(t)}{\tau - t} \right| < \frac{C_6}{|\tau - t|^{K_0}}, \quad t, \tau \in [a, b].$$

$$\begin{aligned} & |(\mathfrak{R}_{k,a,1}\varphi_a - \mathfrak{M}_{k,v}\varphi_a)(t)|^p \leq \frac{2^p (k+1)^{\frac{p}{q}}}{\pi^p} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} C_6^p C_6^{lp} \left\{ \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau - t|^{K_0}} d\tau \right\}^p < \\ & < 2^p C_1 C_6^p \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau - t|^{K_0}} d\tau \right]^p = 2^p C_1 C_6^p \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)| (\tau - a)^{\frac{\eta}{q}}}{|\tau - t|^{\frac{K_0}{p}}} \cdot \frac{(\tau - a)^{-\frac{\eta}{q}}}{|\tau - t|^{\frac{K_0}{q}}} d\tau \right]^p < \\ & < 2^p C_1 C_6^p \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)|^p (\tau - a)^{\eta(p-1)}}{|\tau - t|^{K_0}} d\tau \cdot \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{d\tau}{|\tau - t|^{K_0} (\tau - a)^{\eta}} \right]^{p-1} < \\ & < 2^p C_1 C_6^p \frac{p}{2} (t-a)^{(\frac{\alpha\lambda}{q} - \alpha - \delta)(p-1)} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)|^p (\tau - a)^{\eta(p-1)}}{|\tau - t|^{K_0}} d\tau. \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} \rho^{1-\lambda}(t) |(\mathfrak{R}_{k,a,1}\varphi_a - \mathfrak{M}_{k,v}\varphi_a)(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< 2 C_1^{\frac{1}{p}} C_6^{\frac{1}{p}} C_2^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} (t-a)^{(1-\lambda)\alpha(p-1) + (\frac{\alpha\lambda}{q} - \alpha - \delta)(p-1)} \cdot (b-t)^{(1-\lambda)\beta(p-1)} \right) \times$$

$$\times \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{|\varphi(\tau)|^p (\tau - a)^{\eta(p-1)}}{|\tau - t|^{K_0}} d\tau dt \Big)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2c_1^{\frac{1}{p}} c_2^{\frac{1}{q}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\eta(p-1)} \int_a^{\frac{a+1}{n}} \frac{(b-t)^{(1-\lambda)\beta(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa_0} (t-a)^{\frac{\alpha\lambda}{q} + \delta(p-1)}} dt d\tau \Big]^{\frac{1}{p}} < \\
 &< \frac{1}{c_5} \left\{ \frac{1}{c_1^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{c_2^{\frac{1}{q}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)} (b-\tau)^{\frac{\alpha\lambda}{q} + (1-\lambda)\beta(p-1)} d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} < \\
 &< \frac{\varepsilon}{4c_1^{\frac{1}{p}} c_2^{\frac{1}{q}}} \|\varphi_a\|_{p,p} < \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi_a\|_{p,p} .
 \end{aligned}$$

Zusammen mit (24) ergibt sich dann sofort (22) . Damit ist auch der Hilfssatz 6.3 bewiesen.

Hilfssatz 6.4 : Sei m eine nicht negative ganze Zahl, $\alpha, \beta, \mu \in (0,1)$,
 $p > 1$, $\rho(t) := (t-a)^{\alpha(p-1)} (b-t)^{\beta(p-1)}$ für $t \in [a,b]$, $\lambda \in (0, \frac{p}{p-1}]$,
 $g \in C^{m,\mu}[a,b]$ und $\Pi_\lambda(t) := \rho^{\frac{\lambda}{p}}(t) \cdot [(t-a)(b-t)]^m$ für $t \in [a,b]$.

Dann gilt für den Operator $S_1 \Pi_\lambda g S_1$,

$$(S_1 \Pi_\lambda g S_1)(t) := \left(\frac{1}{\pi i} \right)^2 \oint_a^b \frac{\Pi_\lambda(\tau) g(\tau)}{\tau-t} \oint_a^b \frac{\varphi(x)}{x-\tau} dx d\tau, \quad t \in [a,b] , \quad *)$$

$\varphi \in L_p([a,b], \rho)$, die folgende Gleichung:

$$S_1 \Pi_\lambda g S_1 = \Pi_\lambda g I + V_1 , \quad (25)$$

dabei bezeichnet I den Einsoperator im Raume $L_p([a,b], \rho)$
 und V_1 ist ein vollstetiger Operator von $L_p([a,b], \rho)$ in $W_p^m([a,b], \rho^{1-\lambda})$.

Beweis: Wir setzen:

$$\begin{aligned}
 \gamma &:= \min \{ \alpha, \beta \} , \\
 c &:= \begin{cases} a & \text{für } \alpha \geq \beta \\ b & \text{für } \alpha < \beta \end{cases} ,
 \end{aligned}$$

*) Von dieser Stelle an werde der Operator der Multiplikation mit einer komplexwertigen Funktion h durch dasselbe Symbol h bezeichnet.

$$p_{\lambda}(t) := |t-c|^{\alpha-\beta} \frac{\lambda}{a} \quad \text{für } t \in [a, b] \quad ,$$

$$p_{\lambda}(t) := [(t-a)(b-t)]^{m+\gamma} \frac{\lambda}{a} \quad \text{für } t \in [a, b] \quad \text{und zeigen zunächst, dass die Beziehung} \quad S_1 p_{\lambda} S_1 = p_{\lambda} I + K \quad (26)$$

besteht, wobei K ein vollstetiger Operator von $L_p([a, b], p p_{\lambda}^{-p})$ in $W_p^m([a, b], p^{1-\lambda})$ ist. Nach der Poincaré-Bertrand'schen Vertauschungsformel für singuläre Integrale (vergl. [7] Kapitel I, §3, Theorem 10 auf Seite 30 oder [27]) gilt:

$$\left(\frac{1}{\pi i} \right) \oint_a^b \frac{p_{\lambda}(\tau)}{\tau-t} \left(\oint_a^b \frac{\varphi(x)}{x-\tau} dx \right) d\tau = p_{\lambda}(t) \varphi(t) + \left(\frac{1}{\pi i} \right) \oint_a^b \varphi(x) \left(\oint_a^b \frac{p_{\lambda}(\tau)}{(\tau-t)(x-\tau)} d\tau dx \right) , \quad (27)$$

$(\tau) \quad (x) \quad (x) \quad (\tau)$

$t \in [a, b]$, $\varphi \in L_p([a, b], p p_{\lambda}^{-p})$. Der zweite Summand auf der rechten Seite von (27) kann aber durch Partialbruchzerlegung umgeformt werden zu dem Ausdruck

$$- \left(\frac{1}{\pi i} \right)^2 \oint_a^b \frac{\varphi(x)}{x-t} \left\{ \oint_a^b \frac{p_{\lambda}(\tau)}{\tau-x} d\tau - \oint_a^b \frac{p_{\lambda}(\tau)}{\tau-t} d\tau \right\} dx .$$

Der in (26) vorkommende Operator K lässt sich wie folgt darstellen

$$(K\varphi)(t) := \frac{1}{\pi^2} \oint_a^b \frac{f(x) - f(t)}{x-t} \varphi(x) dx \quad , \quad t \in [a, b] \quad ,$$

$$\varphi \in L_p([a, b], p p_{\lambda}^{-p}) \quad , \quad f(t) := \oint_a^b \frac{p_{\lambda}(\tau)}{\tau-t} d\tau \quad , \quad t \in [a, b] \quad \text{und es gilt,}$$

die behauptete Vollstetigkeit von K noch nachzuweisen. Dazu werden wir f durch $f_v \in C^{m,1}[a, b]$, $v=1, 2, \dots$ approximieren. Mit diesen f_v definieren wir die Operatoren K_v ,

$$(K_v \varphi)(t) := \frac{1}{\pi^2} \int_a^b \frac{f_v(\tau) - f_v(t)}{\tau-t} \varphi(\tau) d\tau \quad , \quad t \in [a, b] \quad , \quad \varphi \in L_p([a, b], p p_{\lambda}^{-p}) \quad ,$$

*) nach Hilfssatz 5.3 und Folgerung 5.2 ist $f \in C^{m+\gamma} \frac{\lambda}{a} [a, b]$

$v=1,2,\dots$. Die Operatoren K_v sind nach Hilfssatz 6.1 vollstetig von $L_p([a,b], \rho p_\lambda^{-p})$ in $W_p^m([a,b], \rho^{1-\lambda})$. Für den Beweis der Gültigkeit von (26) haben wir also nur noch die Beziehung:

$$\|K_v - K\| \rightarrow 0 \text{ für } v \rightarrow \infty \text{ nachzuweisen.} \quad (28)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt aus der Formel (1) unter Beachtung der Formel (4) für $k=0,1,\dots,m$ und $v=1,2,\dots$ die Gleichung:

$$([K_v - K]\varphi)^{(k)}(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_a^b \frac{(f-f_v)^{(k)}(\sigma) - (f-f_v)^{(k)}(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad (28a)$$

$t \in [a,b]$, $\varphi \in L_p([a,b], \rho p_\lambda^{-p})$. Dabei liegt σ zwischen τ und t .

Wir setzen $\kappa_0 := 1 - \frac{\gamma\lambda}{q}$ und $\eta := \gamma + \delta$, wobei die Grösse $\delta > 0$ hinreichend klein gewählt sei, so dass die folgenden Bedingungen (29a) bis (29d) erfüllt sind:

$$\gamma + \delta < 1, \quad (29a)$$

$$\text{falls } \lambda \in [1, q], \text{ dann gelte } (\lambda-1)|\alpha-\beta|(p-1) + \frac{\gamma\lambda}{q} + \delta(p-1) < 1, \quad (29b)$$

falls $\lambda \in (0, 1)$, dann sollen die beiden folgenden Ungleichungen

$$\frac{\gamma\lambda}{q} + \delta(p-1) < 1 \quad \text{und} \quad (29c)$$

$$\gamma + |\alpha-\beta|(1-\lambda) + \delta < 1 \quad \text{erfüllt sein.} \quad (29d)$$

Alle Bedingungen sind stets erfüllbar wegen $|\alpha-\beta| < 1-\gamma$. Ausserdem gilt stets: $\kappa_0 < 1$ und $\eta + \kappa_0 > 1$, weil $\gamma \in (0, 1)$ und $\lambda \in (0, q]$ ist.

Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. wir wählen eine hinreichend grosse Zahl n , die den folgenden Bedingungen (30a) bis (30e) genügt:

$$n > N_0, \quad N_0 := \frac{q}{\gamma\lambda}, \quad (30a)$$

falls $\lambda \in [1, q]$, dann seien die folgenden beiden Ungleichungen:

$$(\lambda-1)|\alpha-\beta|(p-1) + \frac{\gamma\lambda}{q} + (\delta - \frac{1}{n})(p-1) < 1 \quad \text{und} \quad (30b)$$

$$\left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} + \int_{b-\frac{1}{n}}^b \right) \frac{[(t-a)(b-t)]^{-\frac{\gamma\lambda}{q} - \delta(p-1)} |c-t|^{(1-\lambda)|\alpha-\beta|(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa_0}} dt < \frac{\varepsilon p \pi^{2p}}{2^p c_0^p c_i^{\frac{p}{q}}} [(\tau-a)(b-\tau)]^{-\delta(p-1)} |\tau-c|^{(1-\lambda)|\alpha-\beta|(p-1)}, \quad \tau \in (a,b), \quad (30c)$$

erfüllt und schliesslich,

falls $\lambda \in (0,1)$, dann seien die folgenden beiden Ungleichungen:

$$\frac{\gamma\lambda}{q} + (\delta + \frac{1}{n})(p-1) < 1 \quad \text{und} \quad (30d)$$

$$\left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} + \int_{b-\frac{1}{n}}^b \right) \frac{[(t-a)(b-t)]^{\frac{\gamma\lambda}{q} - \delta(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa_0}} dt < \quad (30e)$$

$$< \frac{\varepsilon^p \pi^{2p}}{2^p c_9^p c_7^{p-1}} [(\tau-a)(b-\tau)]^{-\delta(p-1)} \quad \text{für } \tau \in (a,b) \text{ erfüllt. Dabei}$$

wurden die Konstanten:

$$c_7 := \frac{4}{1-\kappa_0-N'_0} + \begin{cases} \frac{4}{1-\eta}, & \text{falls } \lambda \in [1,q] \\ \frac{2}{1-\eta-N'_0} + \frac{2}{1+(\lambda-1)|\alpha-\beta|-\eta-N'_0}, & \text{falls } \lambda \in (0,1), \end{cases}$$

$$c_8 := \frac{8c_9^{\frac{1}{q}}}{\pi^2} \cdot \frac{4}{1-\kappa_0-N'_0} + \frac{1}{\pi^2} \cdot \begin{cases} \frac{2}{1-\frac{\gamma\lambda}{q}-\delta(p-1)} + \frac{2}{1-(\lambda-1)|\alpha-\beta|(p-1)-\frac{\gamma\lambda}{q}-\delta(p-1)}, & \text{für } \lambda \geq 1, \\ \frac{4}{1-\frac{\gamma\lambda}{q}-\delta(p-1)}, & \text{falls } \lambda \in (0,1), \text{ wobei } N'_0 := \frac{1}{N_0+1}, \end{cases}$$

benutzt. Die Bedingungen (30a) bis (30e) sind stets erfüllbar. Wir setzen $\kappa := \kappa_0 + \frac{1}{n}$. Aus (30a) folgt sofort, dass $\kappa < 1$ ist.

Ausserdem gilt noch $\kappa + \eta > 1$.

Man beachte nun, dass $f \in C^{m, \frac{\gamma\lambda}{q} - \frac{1}{n}}[a,b]$ ist. Daher existiert nach Folgerung 5.2 eine Zahl $N(\varepsilon)$ und eine Folge $\{f_v\}_{v=1}^\infty$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

$$f_v \in C^{m, 1}[a,b], \quad (31a)$$

$$\text{falls } v > N(\varepsilon) \text{ ist, dann sei } \|f_v - f\|_{C^{m, \frac{\gamma\lambda}{q} - \frac{1}{n}}[a,b]} < \frac{\varepsilon}{c_8} \quad (31b)$$

$$\text{und } \|f_v\|_{C^{m, \frac{\gamma\lambda}{q}}[a,b]} < 2\|f\|_{C^{m, \frac{\gamma\lambda}{q}}[a,b]} =: \frac{2c_9}{5}. \quad (31c)$$

6.4.1. Wir beweisen (28) zunächst für den Fall: $\lambda \in [1, q]$
und schätzen dazu (28a) für $t \in [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$; $k=0, 1, \dots, m$, $v > N(\varepsilon)$
und $\varphi \in L_p([a, b], \rho \varphi_\lambda^{-p})$ ab:

$$\begin{aligned} |([K_v - K]\varphi)^{(k)}(t)|^p &\leq \frac{1}{\pi^{2p}} \left| \int_a^b \frac{(f-f_v)^{(k)}(\sigma) - (f-f_v)^{(k)}(t)}{\tau - t} |\varphi(\tau)| d\tau \right|^p \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^p}{\pi^{2p} C_8^p} \left(\int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau - t|^\kappa} d\tau \right)^p = \\ &= \frac{\varepsilon^p}{\pi^{2p} C_8^p} \left(\int_a^b \frac{|\varphi(\tau)| (\tau-a)^{\frac{\eta}{q}} (b-\tau)^{\frac{\eta}{q}}}{|\tau-t|^{\frac{\kappa}{p}}} \cdot \frac{(\tau-a)^{-\frac{\eta}{q}} (b-\tau)^{-\frac{\eta}{q}}}{|\tau-t|^{\frac{\kappa}{q}}} d\tau \right)^p \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^p}{\pi^{2p} C_8^p} \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\eta(p-1)} (b-\tau)^{\eta(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} d\tau \cdot \left(\int_a^b \frac{(\tau-a)^{-\eta} (b-\tau)^{-\eta}}{|\tau-t|^\kappa} d\tau \right)^{p-1} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^p C_7^p}{\pi^{2p} C_8^p} [(t-a)(b-t)]^{(\frac{\gamma\lambda}{q} - \gamma - \delta - \frac{1}{n})(p-1)} \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} d\tau. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} |(K_v \varphi - K\varphi)^{(k)}(t)|^p \rho^{1-\lambda}(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon C_7^{\frac{1}{q}}}{\pi^{\frac{1}{2}} C_8} \left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \rho^{1-\lambda}(t) [(t-a)(b-t)]^{(\frac{\gamma\lambda}{q} - \gamma - \delta - \frac{1}{n})(p-1)} \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} d\tau dt \right)^{\frac{1}{p}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\varepsilon C_7^{\frac{1}{q}}}{\pi^2 C_8} \left\{ \int_a^b |\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \rho^{1-\lambda} (t) \frac{[(t-a)(b-t)]^{\left(\frac{\gamma\lambda}{q}-\gamma-\delta-\frac{1}{n}\right)(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} dt d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} = \\
 &= \frac{\varepsilon C_7^{\frac{1}{q}}}{\pi^2 C_8} \left\{ \int_a^b |\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \frac{|t-c| |\alpha-\beta| (1-\lambda)(p-1) [(t-a)(b-t)]^{-\frac{\gamma\lambda}{q}-(\delta+\frac{1}{n})(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} dt d\tau \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Für $t \in [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$ gilt:

$$[(t-a)(b-t)]^{-\frac{p-1}{n}} \leq [(t-a)(b-t)]^{\frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{2p}{n}} < [(t-a)(b-t)]^{\frac{1}{n} 4p}.$$

Bevor wir (32) zu Ende abschätzen, betrachten wir das innere Integral für sich:

$$\begin{aligned}
 &\int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \frac{|t-c| |\alpha-\beta| (1-\lambda)(p-1) [(t-a)(b-t)]^{-\frac{\gamma\lambda}{q}-(\delta+\frac{1}{n})(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} dt < \\
 &< \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \frac{|t-c| |\alpha-\beta| (1-\lambda)(p-1) [(t-a)(b-t)]^{-\frac{\gamma\lambda}{q}-\delta(p-1)+\frac{1}{n} \cdot 4p}}{|\tau-t|^\kappa} dt < \\
 &< 4^p \int_a^b \frac{|t-c| |\alpha-\beta| (1-\lambda)(p-1) [(t-a)(b-t)]^{-\frac{\gamma\lambda}{q}-\delta(p-1)+\frac{1}{n}}}{|\tau-t|^\kappa} dt < \\
 &< \frac{2^{-p} \pi^{2p}}{C_7^p C_8^{1-p}} |\tau-c| |\alpha-\beta| (1-\lambda)(p-1) [(\tau-a)(b-\tau)]^{-\delta(p-1)}.
 \end{aligned}$$

Wenn wir diesen Ausdruck in (32) einsetzen, dann erhalten wir:

$$\int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \rho^{1-\lambda}(t) |(K_v \varphi - K \varphi)^{(k)}(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_a^b |\varphi(\tau)|^p |\tau - c|^{|\alpha - \beta| (1 - \lambda) (p - 1)} [(\tau - a)(b - \tau)]^{\gamma (p - 1)} d\tau \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi\|_{p, \rho p_\lambda}^{-p} \quad (33)$$

Wir schätzen nun $([K_v - K]\varphi)^{(k)}(t)$ für $t \in (a, a + \frac{1}{n}) \cup [b - \frac{1}{n}, b)$ nach oben ab. Dabei benutzen wir (30c) und die folgende Ungleichung:

$$\left| \frac{(f^{(k)} - f_v^{(k)})(\sigma) - (f^{(k)} - f_v^{(k)})(t)}{\tau - t} \right| < \frac{C_9}{|\tau - t|^{\kappa_0}}, \quad \text{die wegen (31c) gilt.}$$

$$|([K_v - K]\varphi)^{(k)}(t)|^p \leq \frac{C_9^p}{\pi^{2p}} \left(\int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau - t|^{\kappa_0}} d\tau \right)^p =$$

$$= \frac{C_9^p}{\pi^{2p}} \left(\int_a^b \frac{|\varphi(\tau)| [(\tau - a)(b - \tau)]^{\frac{\eta}{q}}}{|\tau - t|^{\frac{\kappa_0}{p}}} \cdot \frac{[(\tau - a)(b - \tau)]^{-\frac{\eta}{q}}}{|\tau - t|^{\frac{\kappa_0}{q}}} d\tau \right)^p \leq$$

$$\leq \frac{C_9^p}{\pi^{2p}} \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p [(\tau - a)(b - \tau)]^{\eta \frac{p}{q}}}{|\tau - t|^{\kappa_0}} d\tau \cdot \left(\int_a^b \frac{[(\tau - a)(b - \tau)]^{-\eta}}{|\tau - t|^{\kappa_0}} d\tau \right)^{p-1} <$$

$$< \frac{C_9^p C_7^{\frac{p}{q}}}{\pi^{2p}} [(t - a)(b - t)]^{(\frac{\gamma \lambda}{q} - \gamma - \delta)(p - 1)} \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p [(\tau - a)(b - \tau)]^{\eta (p - 1)}}{|\tau - t|^{\kappa_0}} d\tau.$$

Somit erhalten wir:

$$\left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} + \int_{b-\frac{1}{n}}^b \right) |([K_v - K]\varphi)^{(k)}(t)|^p \rho^{1-\lambda}(t) dt)^{\frac{1}{p}} <$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{C_9 C_7^{\frac{1}{q}}}{\pi^2} \left\{ \left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} + \int_{b-\frac{1}{n}}^b \right) \rho^{1-\lambda}(t) [(t-a)(b-t)]^{\left(\frac{\gamma\lambda}{q}-\gamma-\delta\right)(p-1)} \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa_0}} \times \\
 &\times d\tau dt \right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{C_9 C_7^{\frac{1}{q}}}{\pi^2} \left\{ \int_a^b |\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} \times \right. \\
 &\times \left. \left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} + \int_{b-\frac{1}{n}}^b \right) \rho^{1-\lambda}(t) \frac{[(t-a)(b-t)]^{\left(\frac{\gamma\lambda}{q}-\gamma-\delta\right)(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa_0}} dt d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} < \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} \left\{ |\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} \cdot |\tau-c|^{\alpha-\beta|(1-\lambda)(p-1)} \times \right. \\
 &\times \left. [(\tau-a)(b-\tau)]^{-\delta(p-1)} d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi\|_{p, \rho p_\lambda^{-p}}. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Aus (33) und (34) folgt sofort (28) und damit (26) für $\lambda \in [1, q]$.

6.4.2. Wir beweisen (28) für den Fall $\lambda \in (0, 1)$ und schätzen dazu (28a) für $t \in [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$, $k=0, 1, \dots, m$, $v > N(\varepsilon)$ und

$\varphi \in L_p([a, b], \rho p_\lambda^{-p})$ ab:

$$\begin{aligned}
 |([K_v - K]\varphi)^{(k)}(t)|^p &\leq \frac{\varepsilon^p}{\pi^{2p} C_8^p} \left\{ \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau-t|^\kappa} d\tau \right\}^p = \\
 &= \frac{\varepsilon^p}{\pi^{2p} C_8^p} \left\{ \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)| [(\tau-a)(b-\tau)]^{\frac{\eta}{q}} |\tau-c|^{\frac{1}{q}(1-\lambda)|\alpha-\beta|}}{|\tau-t|^{\frac{\kappa}{p}}} \times \right. \\
 &\times \left. \frac{[(\tau-a)(b-\tau)]^{-\frac{\eta}{q}} |\tau-c|^{-|\alpha-\beta|(1-\lambda)\frac{1}{q}}}{|\tau-t|^{\frac{\kappa}{q}}} d\tau \right\}^p \leq \\
 &\leq \frac{\varepsilon^p}{\pi^{2p} C_8^p} \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} |\tau-c|^{|\alpha-\beta|(1-\lambda)(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} d\tau \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \int_a^b \frac{[(\tau-a)(b-\tau)]^{-\eta} |\tau-c|^{-|\alpha-\beta|(1-\lambda)}}{|\tau-t|^\kappa} d\tau \right\}^{p-1} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon C_7^{p-1}}{\pi^2 C_8^p} [(\tau-a)(b-\tau)]^{\left(\frac{\gamma\lambda}{q} - \gamma - \delta - \frac{1}{n}\right)(p-1)} |\tau-c|^{-(1-\lambda)|\alpha-\beta|(p-1)} \times$$

$$\times \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} |\tau-c|^{(1-\lambda)|\alpha-\beta|(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} d\tau.$$

Damit erhalten wir:

$$\left\{ \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} |(K_\nu \varphi - K\varphi)^{(k)}(t)|^{p^{1-\lambda}}(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon C_7^{\frac{1}{q}}}{\pi^2 C_8} \left\{ \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \rho^{1-\lambda}(t) [(\tau-a)(b-\tau)]^{\left(\frac{\gamma\lambda}{q} - \gamma - \delta - \frac{1}{n}\right)(p-1)} |\tau-c|^{-(1-\lambda)|\alpha-\beta|(p-1)} \times$$

$$\times \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} |\tau-c|^{(1-\lambda)|\alpha-\beta|(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} d\tau dt \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{\varepsilon C_7^{\frac{1}{q}}}{\pi^2 C_8} \left\{ \int_a^b |\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} |\tau-c|^{|\alpha-\beta|(1-\lambda)(p-1)} \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \rho^{1-\lambda}(t) \times$$

$$\times \frac{[(\tau-a)(b-\tau)]^{\left(\frac{\gamma\lambda}{q} - \gamma - \delta - \frac{1}{n}\right)(p-1)} |\tau-c|^{-(1-\lambda)|\alpha-\beta|(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} dt d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{\varepsilon C_7^{\frac{1}{q}}}{\pi^2 C_8} \int_a^b |\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} |\tau-c|^{(1-\lambda)|\alpha-\beta|(p-1)} \times$$

$$\times \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \frac{[(t-a)(b-t)]^{-\frac{\gamma\lambda}{q} - (\delta + \frac{1}{n})(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} dt d\tau \Big)^{\frac{1}{p}} \quad (35)$$

Für $t \in [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$ gilt:

$[(t-a)(b-t)]^{-\frac{p-1}{n}} \leq [(t-a)(b-t)]^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{2p}{n} < 4^p \cdot [(t-a)(b-t)]^{\frac{1}{n}}$. Bevor wir (35) zu Ende abschätzen, betrachten wir das innere Integral für sich:

$$\begin{aligned} & \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \frac{[(t-a)(b-t)]^{-\frac{\gamma\lambda}{q} - (\delta + \frac{1}{n})(p-1)}}{|\tau-t|^\kappa} dt < 4^p \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \frac{[(t-a)(b-t)]^{-\frac{\gamma\lambda}{q} - \delta(p-1) + \frac{1}{n}}}{|\tau-t|^\kappa} dt < \\ & < 4^p \int_a^b \frac{[(t-a)(b-t)]^{-\frac{\gamma\lambda}{q} - \delta(p-1) + \frac{1}{n}}}{|\tau-t|^\kappa} dt < \frac{\pi^{2p} C_8^{p-1}}{2^p C_7^p} \cdot [(\tau-a)(b-\tau)]^{-\delta(p-1)}. \end{aligned}$$

Wenn wir diese Schranke in (35) einsetzen, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \rho^{1-\lambda}(t) |(K_\nu \varphi - K\varphi)^{(k)}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} < \\ & < \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_a^b |\varphi(\tau)|^p |\tau-c|^{(1-\lambda)|\alpha-\beta|(p-1)} [(t-a)(b-\tau)]^{\gamma(p-1)} d\tau \right)^{\frac{1}{p}} = \\ & = \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi\|_{p, \rho p_\lambda^{-p}}. \quad (36) \end{aligned}$$

Wir schätzen nun $([K_\nu - K]\varphi)^{(k)}(t)$ für $t \in (a, a+\frac{1}{n}] \cup [b-\frac{1}{n}, b)$ nach oben ab. Dabei benutzen wir (30c) und die folgende Ungleichung:

$$\left| \frac{f^{(k)}(\sigma) - f^{(k)}(\tau)}{\tau - \sigma} \right| < \frac{C_9}{|\tau-t|^{k_0}}, \quad \text{die wegen (31c) gilt.}$$

$$\begin{aligned}
 |([K_v - K]\varphi)^{(k)}(t)|^p &\leq \frac{C_9^p}{\pi^{2p}} \left\{ \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau-t|^{K_0}} d\tau \right\}^p = \\
 &= \frac{C_9^p}{\pi^{2p}} \left\{ \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)| [(\tau-a)(b-\tau)]^{\frac{\eta}{q}} |\tau-c|^{(1-\lambda)|\alpha-\beta|\frac{1}{q}}}{|\tau-t|^{\frac{K_0}{p}}} d\tau \right\}^p \times \\
 &\quad \times \frac{[(\tau-a)(b-\tau)]^{-\frac{\eta}{q}} |\tau-c|^{-\frac{1}{q}(1-\lambda)|\alpha-\beta|}}{|\tau-t|^{\frac{K_0}{q}}} d\tau \}^p \leq \\
 &\leq \frac{C_9^p}{\pi^{2p}} \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\frac{\eta p}{q}} |\tau-c|^{|\alpha-\beta|(1-\lambda)(p-1)}}{|\tau-t|^{\frac{K_0}{p}}} d\tau \times \\
 &\quad \times \left\{ \int_a^b \frac{[(\tau-a)(b-\tau)]^{-\eta} |\tau-c|^{-(1-\lambda)|\alpha-\beta|}}{|\tau-t|^{K_0}} d\tau \right\}^{p-1} < \\
 &< \frac{C_9^p C_7^{p-1}}{\pi^{2p}} [(t-a)(b-t)]^{\left(\frac{\gamma\lambda}{q} - \gamma - \delta\right)(p-1)} |t-c|^{-(1-\lambda)(p-1)|\alpha-\beta|} \times \\
 &\quad \times \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} |\tau-c|^{(1-\lambda)(p-1)|\alpha-\beta|}}{|\tau-t|^{K_0}} d\tau .
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 &\left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} + \int_{b-\frac{1}{n}}^b \right) |([K_v - K]\varphi)^{(k)}(t)|^p \rho^{1-\lambda}(t) dt \Big)^{\frac{1}{p}} < \\
 &< \frac{C_9 C_7^{\frac{1}{q}}}{\pi^2} \left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} + \int_{b-\frac{1}{n}}^b \right) \rho^{1-\lambda}(t) \cdot [(t-a)(b-t)]^{\left(\frac{\gamma\lambda}{q} - \gamma - \delta\right)(p-1)} |t-c|^{-(1-\lambda)(p-1)|\alpha-\beta|} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_a^b \frac{|\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} |\tau-c|^{(1-\lambda)(p-1)} |\alpha-\beta|}{|\tau-t|^{\kappa_0}} d\tau dt \Big)^{\frac{1}{p}} = \\
 & = \frac{C_9 C_9^{\frac{1}{p}}}{\pi^2} \left\{ \int_a^b |\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} |\tau-c|^{(1-\lambda)(p-1)} |\alpha-\beta| \cdot \left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} + \int_{b-\frac{1}{n}}^b \right) \rho^{1-\lambda}(t) \times \right. \\
 & \quad \times \frac{[(t-a)(b-t)]^{\left(\frac{\gamma\lambda}{q}-\gamma-\delta\right)(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa_0}} |\tau-c|^{(1-\lambda)(p-1)} |\alpha-\beta| dt d\tau \Big)^{\frac{1}{p}} < \\
 & < \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \int_a^b |\varphi(\tau)|^p [(\tau-a)(b-\tau)]^{\eta(p-1)} |\tau-c|^{(1-\lambda)(p-1)} |\alpha-\beta| [(\tau-a)(b-\tau)]^{-\delta(p-1)} d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} = \\
 & = \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi\|_{p, \rho p_\lambda}^{-p} \quad \text{für } \lambda \in (0,1) \quad . \quad (37)
 \end{aligned}$$

Aus (36) und (37) folgt sofort (28) für $\lambda \in (0,1)$. Für $\lambda \in [1,q]$ gilt (28) ebenfalls, wie auf Seite 89 festgestellt wurde. Somit gilt (26) für alle $\lambda \in (0,q]$. Unmittelbar aus (26) folgt aber die Gleichung $S_1 \mathfrak{B}_\lambda S_1 p_\lambda I = \Pi_\lambda I + V_2$, wobei V_2 einen vollstetigen (38)

Operator von $L_p([a,b], \rho)$ in $W_p^m([a,b], \rho^{1-\lambda})$ bezeichnet. Im Hilfssatz 6.3 wurde festgestellt, dass der Operator $[\Pi_\lambda S_1 - S_1 \Pi_\lambda]$ den Raum $L_p([a,b], \rho)$ vollstetig in $W_p^m([a,b], \rho^{1-\lambda})$ abbildet. Eine Folgerung von Hilfssatz 6.3 ist, dass der Operator $[\mathfrak{B}_\lambda S_1 - S_1 \mathfrak{B}_\lambda I]$ den $L_p([a,b], \rho^{-p})$ vollstetig in $W_p^m([a,b], \rho^{1-\lambda})$ abbildet. Aus diesen beiden Feststellungen und aus der Beziehung: (für $k=0,1,\dots,m$ und für $\varphi \in L_p([a,b], \rho)$) $\{\mathfrak{B}_\lambda [S_1 p_\lambda - p_\lambda S_1] \varphi\}^{(k)} = \{[\mathfrak{B}_\lambda S_1 - S_1 \mathfrak{B}_\lambda] p_\lambda \varphi\}^{(k)} - \{[\Pi_\lambda S_1 - S_1 \Pi_\lambda] \varphi\}^{(k)}$ folgt die Vollstetigkeit der Abbildungen $\varphi \rightarrow \{\mathfrak{B}_\lambda [S_1 p_\lambda - p_\lambda S_1] \varphi\}^{(k)}$, $k=0,1,\dots,m$,

von $L_p([a,b], \rho)$ in $L_p([a,b], \rho^{1-\lambda})$. Nun ist S_1 ein stetiger Operator von dem Raum $L_p([a,b], \rho^{1-\lambda})$ in sich. Weiterhin gilt nach Hilfssatz 5.5 für jedes $k=0,1,\dots,m$ und $\varphi \in L_p([a,b], \rho)$ die Gleichung:

$$\{S_1 \mathfrak{B}_\lambda [S_1 p_\lambda - p_\lambda S_1] \varphi\}^{(k)} = \{S_1 \{\mathfrak{B}_\lambda [S_1 p_\lambda - p_\lambda S_1] \varphi\}^{(k)}\}.$$

Also bildet der Operator $S_1 \mathfrak{B}_\lambda [S_1 p_\lambda - p_\lambda S_1]$ den Raum $L_p([a,b], \rho)$ vollstetig in $W_p^m([a,b], \rho^{1-\lambda})$ ab. Somit folgt aus der Gleichung

$$S_1 \Pi_\lambda S_1 = S_1 \mathfrak{P}_\lambda S_1 \mathfrak{p}_\lambda - S_1 \mathfrak{P}_\lambda [S_1 \mathfrak{p}_\lambda - \mathfrak{p}_\lambda S_1]$$

wegen (38) sofort die Beziehung

$$S_1 \Pi_\lambda S_1 = \Pi_\lambda I + V_3, \quad (39)$$

wobei V_3 vollstetig von $L_p([a,b], \rho)$ in $W_p^m([a,b], \rho^{1-\lambda})$ abbildet.

Der Operator $[gS_1 - S_1 gI]$ bildet nach Hilfssatz 6.1 den Raum $L_p([a,b], \rho)$ vollstetig in $W_p^m([a,b], \rho^{1-\lambda})$ ab. Weiterhin bildet der Operator $S_1 \Pi_\lambda I$ nach Hilfssatz 5.5 den Raum $W_p^m([a,b], \rho^{1-\lambda})$ stetig in $W_p^m([a,b], \rho^{1-2\lambda})$ und damit in $W_p^m([a,b], \rho^{1-\lambda})$ ab. Aus der Beziehung

$$S_1 \Pi_\lambda gS_1 = S_1 \Pi_\lambda [gS_1 - S_1 g] + S_1 \Pi_\lambda S_1 g$$

folgt dann wegen (39) sofort die Behauptung unseres Hilfssatzes 6.4.

Folgerung 6.5: Γ und S_1 seien wie in Folgerung 5.5 verstanden. Die Hilfssätze 6.1, 6.3 und 6.4 ($\lambda \neq 0$ in 6.4) behalten ihre Gültigkeit, wenn das Segment $[a,b]$ durch Γ und $L_p([a,b], \rho)$ bzw. $W_p^m([a,b], \rho^{1-\lambda})$ durch $L_p(\Gamma, \rho)$ bzw. $W_p^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ ersetzt werden.

Folgerung 6.6: Sei m eine nicht negative Zahl, n eine natürliche Zahl, $p > 1$, $\mu \in (0, 1)$, $\lambda \in [0, \frac{p}{p-1}]$. Ferner seien Γ , S_1 und Π_λ wie in Folgerung 5.4 und 5.5, $\gamma_i \in (0, p-1)$ für $i=1, 2, \dots, 2r+s$,

$\rho(t) := \prod_{i=1}^{2r+s} |t - c_i|^{\gamma_i}$, $t \in \Gamma$. Ausserdem sei A eine (n, n) -Matrix, deren

Elemente a_{ij} , $i, j=1, 2, \dots, n$ dem Raum $C^{m, \mu}(\Gamma)$ angehören sollen.

Wir setzen:

$$S := \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Pi := \begin{pmatrix} \Pi_\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Pi_\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Pi_\lambda \end{pmatrix}$$

Dann gelten die folgenden 3 Behauptungen:

1. Der Operator $[SAI - AS]$ ¹³⁾ bildet den Banachraum $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$

¹³⁾ Für die Matrizenmultiplikation gelte die gleiche Vereinbarung wie in der Fussnote *) auf Seite 82.

vollstetig in den Banachraum $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$ ab ¹⁴⁾ .

2. Der Operator [SHAI-AIS] bildet den Banachraum $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ vollstetig in den Banachraum $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ ab .

3. Für $\lambda \neq 0$ gilt die Beziehung $SHAS = \Pi A + K$, wobei K ein Operator ist, der den Raum $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ vollstetig in den Raum $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ abbildet.

Folgerung 6.7 : Sei Γ , S , Π und ρ wie vorher. Ausserdem sei A eine (n,n) -Matrix, deren Elemente a_{ij} , $i, j=1, 2, \dots, n$ bis auf mögliche (eventuelle) Unstetigkeiten 1. Art ¹⁵⁾, die in den Punkten c_i , $i=2r+1, 2r+2, \dots, 2r+s$, liegen, h"olderstetig sind und dar"uberhinaus gelte : $a_{ij}|_{\hat{\Gamma}} \in C^{m, \mu}(\hat{\Gamma})$, $i, j=1, 2, \dots, n$ f"ur jede Kurve $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$, f"ur die kein c_i , $i=2r+1, 2r+2, \dots, 2r+s$, innerer Punkt von $\hat{\Gamma}$ ist. ¹⁶⁾

Dann gelten die folgenden beiden Behauptungen :

1. Der Operator [SHAI-AIS] bildet den Raum $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ vollstetig in den Raum $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ ab.

2. F"ur $\lambda \neq 0$ gilt die Beziehung $SHAS = \Pi A + \Omega_A$, wobei Ω_A ein Operator ist, der den Raum $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ vollstetig in den Raum $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ abbildet.

¹⁴⁾ siehe Definition 1.6 und 1.7 auf Seite 8

¹⁵⁾ Bekanntlich bezeichnet man den Punkt $t_0 \in \Gamma$ als Unstetigkeitspunkt erster Art der Funktion φ , wenn die bez"uglich der Orientierung ($\curvearrowright$) von Γ gebildeten Grenzwerte : a) $\varphi_0^+ := \lim_{t \rightarrow t_0^+} \varphi(t) \dots$, wobei

$$t \curvearrowright t_0$$

sich t entgegengesetzt zur Orientierung von Γ dem Punkte t_0 auf Γ n"ahert und b) $\varphi_0^- = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0^- \\ t \curvearrowleft t_0}} \varphi(t) \dots$, wobei sich t im Sinne der Orientierung von Γ dem Punkte t_0 n"ahert, (eigentl.) existieren,

endlich und ungleich sind (d.h. $\varphi_0^+ \neq \varphi_0^-$). Man kann auch A als (n,n) -Matrix von st"uckweise (gleichm"assig) h"olderstetigen Funktionen be-

7. Abschnitt

DEFINITION DER KLASSE DER FREDHOLMOPERATOREN UND DIE REGULARISIERUNG VON SINGULÄREN INTEGRALGLEICHUNGEN NICHT ELLIPTISCHEN TYPIS :

Definition 7.1.1 : Ein abgeschlossener Operator heisst normalauflösbar, wenn sein Wertebereich abgeschlossen ist.

Bemerkung 7.1.2 : (H.Schaefer, vergl. Satz 11 und Satz 1 in [34])

X, Y seien lokalkonvexe Räume und A sei ein stetiger linearer Operator, dessen Definitionsbereich $D(A)$ im Raume X dicht und dessen Wertebereich $R(A)$ im Raume Y liegen möge. Die Eigenschaft von A , einen abgeschlossenen Wertebereich zu besitzen, ist äquivalent zur folgenden Eigenschaft:

Eigenschaft (N) : Die Gleichung $Ax=y$ besitzt mindestens eine Lösung $x \in X$ genau dann, wenn $(z,y)=0$ ist für alle $z \in N(A^*) := \{x : A^*x=0\}$. Dabei bezeichnet A^* den zu A dualen Operator [d.h. es gilt $(A^*z, x) := (z, Ax)$ für $x \in D(A), z \in Y'$], $N(A^*)$ ist der Kern von A^* und (z,y) bezeichnet den Wert von $z \in N(A^*)$ in $y \in Y$.

Definition 7.1.3 : (siehe [33], [34], [32], [1] und [70])

Ein normalauflösbarer Operator heisst Plus-Semifredholmoperator, wenn er einen endlichdimensionalen Kern besitzt (d.h. die Dimension des Nullraumes von dem Operator ist endlich).

Definition 7.1.4 : Ein normalauflösbarer Operator A heisst Minus-Semifredholmoperator, wenn A einen endlichdimensionalen Defekt besitzt (d.h. die Dimension des Nullraumes von A^* ist damit endlich).

Definition 7.1.5 : (vergl.a. [73] und [74])

Ein normalauflösbarer Operator heisst Fredholmoperator, wenn sowohl die Kerndimension als auch der Defekt des Operators endlich ist.

Definition 7.2.1 : Der Operator B heisst linker Regularisator des Operators $A: X \rightarrow Y$, wenn die Beziehungen

$$D(B) \supset R(A) \quad \text{und} \quad BA = I + V$$

zeichnen.

- 16) Insbesondere ist also für $m > 0$ auch der Fall mit erfasst, in dem alle a_{ij} , $i, j=1, 2, \dots, n$, und deren Ableitungen bis einschliesslich zur Ordnung $m-1$ hölderstetig auf Γ sind, während die Ableitung m -ter Ordnung $a_{ij}^{(m)}$, $i, j=1, 2, \dots, n$, bis auf Unstetigkeiten 1. Art, die in den Punkten c_1 , $i=2r+1, 2r+2, \dots, 2r+s$, liegen, hölderstetig sind, d.h. es gilt $a_{ij}^{(m)}|_{\hat{\Gamma}} \in H^1(\hat{\Gamma})$, $i, j=1, \dots, n$ für jede Kurve $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$, für die kein c_1 innerer Punkt von $\hat{\Gamma}$ ist.

gelten, wobei V ein vollstetiger Operator in X ist und I bezeichne den identischen Operator in X . Der linke Regularisator B heisst äquivalenter linker Regularisator von A , wenn $D(B)=R(A)$ gilt.

Satz 7.2.2 : (Rakovschtschik, L.S. [35] Theorem 3)

Die Existenz eines beschränkten linken Regularisators des abgeschlossenen Operators $A: X \rightarrow Y$ ist notwendig und hinreichend dafür, dass A ein Plus-Semifredholmoperator ist.

Vorbereitung 7.2.3 : In der Bezeichnung von Folgerung 6.7 betrachten wir jetzt die Gleichung

$$\mathcal{A}\varphi := A\varphi + B\mathcal{S}\varphi + \mathcal{S}\varphi = f \quad (1)$$

unter folgenden Voraussetzungen :

1. Γ bestehe aus r nicht geschlossenen und l geschlossenen, paarweise disjunkten, einfachen Kurven Γ_k der Klasse $C^{m+1, \mu}$.

($m \geq 0$ und ganzzahlig, $\mu \in (0, 1)$), wegen der Bezeichnung vergleiche auch Definition 1.5 und Folgerung 5.4 auf Seite 7 und 63)

2. Es sei $p > 1$. Zu jedem Endpunkt c_k , $k=1, 2, \dots, 2r$, der nicht geschlossenen Kurven und zu jedem von s vorgegebenen inneren Punkten c_k , $k=2r+1, 2r+2, \dots, 2r+s$, von Γ sei eine Zahl γ_k , $\gamma_k \in (0, p-1)$ vorgegeben. Als Gewichtsfunktion ρ ist damit

$$\rho(t) := \begin{cases} \prod_{k=1}^{2r+s} |t - c_k|^{\gamma_k} & \text{für } s+r > 0 \\ 1 & \text{für } s+r = 0 \end{cases} \text{ und für } t \in \Gamma \text{ festgelegt.}$$

3. $\Delta_1 := \det(A-B)$ besitze auf Γ , ausser in den Endpunkten, nur endlich viele Nullstellen in den Punkten $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}$. Die natürlichen Zahlen $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1r_1}$ seien die Ordnungen dieser Nullstellen. $\Delta_2 := \det(A+B)$ besitze auf Γ , ausser in den Endpunkten, nur endlich viele Nullstellen in den Punkten $t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2r_2}$. Die natürlichen Zahlen $m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2r_2}$ seien die Ordnungen dieser Nullstellen. $\Delta_1 \cdot \Delta_2$ besitze in den Punkten c_k , $k=1, 2, \dots, 2r+s$, keine Nullstellen. $m := \max \{m_{ij} ; j=1, 2, \dots, r_i, i=1, 2\}$

4. $a_{ij}|\hat{\Gamma}, b_{ij}|\hat{\Gamma} \in C^{m, \mu}(\hat{\Gamma})$, $i, j=1, \dots, n$,
für jedes $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$ mit der Eigenschaft : kein c_k , $k=1, 2, \dots, 2r+s$, ist innerer Punkt von $\hat{\Gamma}$. (Man beachte dabei die Fussnote ⁵⁾ auf Seite 5)

5. $\mathfrak{L}$ ist ein linearer vollstetiger Operator von $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ in $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$.

6. $f \in W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$.

7. Die Lösung φ von (1) soll im Raum $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ gesucht werden.

Bemerkung 7.2.4 : (Gochberg's negatives Ergebnis)

Für den Fall, dass Γ nur aus geschlossenen Kurven besteht (d.h. es ist $s+r=0$) und dass die Koeffizienten stetig sind, bewies I.C.Gochberg in [36], dass dann der Operator $\mathfrak{U}$, falls sein Definitionsbereich gleich dem ganzen Urbildraum $L_2(\Gamma)$ ist, keinen beschränkten Regularisator auf dem Raume $L_2(\Gamma)$ besitzt. Der Operator $\mathfrak{U}$ unter diesen Voraussetzungen ist damit notwendig kein Fredholmoperator. Dieses Ergebnis ist auch auf den Fall $s+r>0$ übertragbar (siehe [39] auf Seite 28, Zeile 17 bis 20)

7.2.5 Einschränkung $\bar{\mathfrak{U}}$ von $\mathfrak{U}$: Wir definieren nun den Operator $\bar{\mathfrak{U}}$, der aus $\mathfrak{U}$ durch Einschränkung hervorgeht, so dass, wie nachher gezeigt werden soll, $\bar{\mathfrak{U}}$ ein Fredholmoperator von $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ in $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$, $p>1$, ist, indem wir setzen :

$$\bar{\mathfrak{U}} := \mathfrak{U}|D(\bar{\mathfrak{U}}) \quad \text{und} \quad D(\bar{\mathfrak{U}}) := \{\varphi \in L_{p,n}(\Gamma, \rho) : \mathfrak{U}\varphi \in W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)\}.$$

Bemerkung : $\bar{\mathfrak{U}}$ ist ein linearer, abgeschlossener Operator mit dichtem Definitionsgebiet $D(\bar{\mathfrak{U}}) \subset L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ und einem Wertebereich $R(\bar{\mathfrak{U}}) \subset W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$, denn $\dot{C}_n^\infty(\Gamma)$ ist eine Teilmenge von $D(\bar{\mathfrak{U}})$ und nach Folgerung 3.9 liegt $\dot{C}_n^\infty(\Gamma)$ dicht im Raume $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$. Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit des Operators $\bar{\mathfrak{U}}$:

Sei $\varphi_K \in D(\bar{\mathfrak{U}})$, $\varphi_K \rightarrow \varphi \in L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ und $\bar{\mathfrak{U}}\varphi_K \rightarrow \psi$ in der Norm des Raumes $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$. Dann konvergiert insbesondere $\mathfrak{U}\varphi_K \rightarrow \psi$ in der Norm von $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$, und auf Grund der Stetigkeit des Operators $\mathfrak{U}$ im Raume $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ ist somit $\psi = \mathfrak{U}\varphi$. Also ist $\varphi \in D(\bar{\mathfrak{U}})$ und $\bar{\mathfrak{U}}\varphi = \mathfrak{U}\varphi = \psi$, d.h. $\bar{\mathfrak{U}}$ ist abgeschlossen.

Satz 7.2.6 : Der Operator $\bar{\mathfrak{U}} : L_{p,n}(\Gamma, \rho) \rightarrow W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$ besitzt den beschränkten linken Regularisator $\mathfrak{B}_1$,

$$\mathfrak{B}_1 := \frac{1}{2\pi_\lambda} \left\{ \frac{1}{\Delta_1} (I - \mathfrak{G}_1) \tilde{D} (I - S) + \frac{1}{\Delta_2} (I - \mathfrak{G}_2) \tilde{C} (I + S) \right\} \pi_\lambda I. \quad (2)$$

Erläuterung : Dabei wurde gesetzt: $C := A + B$, $D := A - B$, $I :=$ Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^n$, $\tilde{C}$ bzw. $\tilde{D}$ bezeichne diejenige Matrix, deren Elemente $\tilde{c}_{ij}$ bzw. $\tilde{d}_{ij}$ die Adjunkte zu c_{ji} bzw. d_{ji} aus der Matrix C bzw. aus der Matrix D ist, d.h. es gilt: $\tilde{C}C = C\tilde{C} = \Delta_2 I$ und $\tilde{D}D = D\tilde{D} = \Delta_1 I$.

$\mathfrak{G}_i \varphi$, $i=1,2$, bezeichne das Hermitesche Interpolationspolynom (siehe 4. Abschnitt) von φ mit den Eigenschaften:

$$(\mathfrak{G}_i \varphi)^{(v)}(c_k) = \varphi^{(v)}(c_k) \quad \text{für } k=1,2,\dots,2r+s, \quad v=0,1,\dots,m-1, \quad i=1,2$$

$$\text{und } (\mathfrak{G}_i \varphi)^{(v)}(t_{ij}) = \varphi^{(v)}(t_{ij}) \quad \text{für } v=0,1,\dots,m_{ij}-1, \quad j=1,2,\dots,r_i, \quad i=1,2.$$

Beweis von Satz 7.2.6 : Der durch (2) gegebene Operator $\mathfrak{B}_1$ bildet nach den vorangegangenen Hilfssätzen 5.5, 2.1 und 4.5 den Raum

$W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$ stetig in den Raum $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ ab. Wir zeigen noch, dass die Gleichung

$$\mathfrak{B}_1 \tilde{u} = I + \mathfrak{X}_1 \quad (3)$$

gilt, wobei $\mathfrak{X}_1$ einen gewissen vollstetigen Operator im Raume $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ bezeichnet. Nach der Folgerung 6.6 ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} (I-S)\pi \tilde{u} &= \pi A + \pi B S - S \pi A - S \pi B S + (I-S)\pi \mathfrak{X} = \\ &= \pi(A-B)(I-S) - [S \pi A - A \pi S] - K_B + (I-S)\pi \mathfrak{X} = \\ &= \pi D(I-S) + \mathfrak{X}_1 \quad \text{und} \quad *) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (I+S)\pi \tilde{u} &= \pi A + \pi B S + S \pi A + S \pi B S + (I+S)\pi \mathfrak{X} = \\ &= \pi(A+B)(I+S) + [S \pi A - A \pi S] + K_B + (I+S)\pi \mathfrak{X} = \\ &= \pi C(I+S) + \mathfrak{X}_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Dabei sind die Operatoren $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 : L_{p,n}(\Gamma, \rho) \rightarrow W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ vollstetig.

Da die Operatoren $\frac{1}{2\pi_\lambda \Delta_i} (I - \mathfrak{G}_i)$, $i=1,2$, den Raum

$W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ stetig in den Raum $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ abbilden, so ist $\mathfrak{X}_1$,

$$\mathfrak{X}_1 := \frac{1}{2\pi_\lambda \Delta_1} (I - \mathfrak{G}_1) \tilde{D} \mathfrak{X}_1 + \frac{1}{2\pi_\lambda \Delta_2} (I - \mathfrak{G}_2) \tilde{C} \mathfrak{X}_2, \quad (6)$$

*) Nach Folgerung 6.7 (2. Behauptung) auf Seite 95 gilt:

$$S \pi B S = \pi B + K_B, \quad K_B \text{ vollstetig.}$$

ein vollstetiger Operator im Raume $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$. Aus $\bar{u}\varphi \in W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$ folgt nach Hilfssatz 5.6 sofort, dass,

$(I-S)\Pi\bar{u}\varphi \in W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ und $(I+S)\Pi\bar{u}\varphi \in W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ für beliebige

$\varphi \in D(\bar{u})$ gilt. Wegen (4) und (5) folgt damit nach Hilfssatz 2.1 sofort (die Gewichtsfunktion $\rho^{1-\lambda}$ erfüllt die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2.1, wie man leicht nachprüft), dass auch die beiden Vektoren

$$\varphi_1 := \Pi_\lambda \Delta_1 (I-S)\varphi \quad \text{und} \quad \varphi_2 := \Pi_\lambda \Delta_2 (I+S)\varphi$$

Elemente des Raumes $C_n^{m-1}(\Gamma)$ sind und es gilt offensichtlich

$$\mathfrak{L}_1 \varphi_1 = \mathfrak{L}_2 \varphi_2 = 0.$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von (4) bis (6) die Gleichung (3). Q.E.D.

Aus Satz 7.2.2, Satz 7.2.6 und der Bemerkung, die vor dem Satz 7.2.6 steht, ergibt sich die

Folgerung 7.2.7: Der Operator $\bar{u}$ ist ein Plus-Semifredholmoperator.

Definition 7.3.1: Der Operator $B: Y \rightarrow X$ heisst rechter Regularisator des Operators $A: X \rightarrow Y$, wenn die Beziehungen

$$R(B) \subset D(A) \quad \text{und} \quad AB = I + K$$

gelten, wobei K ein vollstetiger Operator in X ist. Der rechte Regularisator B heisst äquivalenter rechter Regularisator von A , wenn

$$D(A) = R(B) \quad \text{gilt.}$$

Hilfssatz 7.3.2: (S.Prössdorf siehe Hilfssatz in [38])

Aus der Existenz eines beschränkten rechten Regularisators des abgeschlossenen Operators A folgt, dass A ein Minus-Semifredholmoperator ist.

Hilfssatz 7.3.3: Es sei λ aus dem offenen Intervall $(0, \frac{p}{p-1})$.

Wir betrachten die Gleichung (1) unter den Voraussetzungen:

1. bis 4. von der Vorbereitung 7.2.3 und ausserdem sei

5. $\mathfrak{A}$ ein linearer vollstetiger Operator von $L_{p,n}(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ in

$$W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda}) \quad \text{und}$$

6. $f \in W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$.

Die Lösung φ von (1) soll in diesem Falle im Raume $L_{p,n}(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ gesucht werden. Ferner sei der Operator $\mathfrak{A}$ zu $\bar{\mathfrak{A}}$ eingeschränkt :

$$\bar{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A}|D(\bar{\mathfrak{A}}) \quad , \quad \text{wobei} \quad D(\bar{\mathfrak{A}}) := \{ \varphi \in L_{p,n}(\Gamma, \rho^{1-\lambda}) : \mathfrak{A}\varphi \in W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda}) \}.$$

Der Operator $\bar{\mathfrak{A}}$ besitzt dann den beschränkten rechten Regularisator $\mathfrak{B}_r$,

$$\mathfrak{B}_r := \frac{1}{2} \Pi_\lambda \{ \tilde{D} (I - S) \frac{1}{\Delta_1 \Pi_\lambda} (I - \mathfrak{S}_1) + \tilde{C} (I + S) \frac{1}{\Delta_2 \Pi_\lambda} (I - \mathfrak{S}_2) \} . \quad (7)$$

Beweis : $\mathfrak{B}_r$ bildet nach den Hilfssätzen 5.5, 2.1 und 4.5 den Raum $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ stetig in den Raum $L_{p,n}(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ ab. Wir zeigen nun, dass die Beziehung

$$\bar{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}_r = I + \mathfrak{X}_r \quad (8)$$

gilt, wobei $\mathfrak{X}_r$ einen gewissen vollstetigen Operator im Raume $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ bezeichnet. Nach der Folgerung 6.6 ergibt sich nämlich :

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{A}} \Pi_\lambda \tilde{D} (I - S) &= A \Pi_\lambda \tilde{D} + B S \Pi_\lambda \tilde{D} - A \Pi_\lambda \tilde{D} S - B S \Pi_\lambda \tilde{D} S + \mathfrak{A} \Pi_\lambda \tilde{D} (I - S) = \\ &= \Pi_\lambda (A - B) \tilde{D} (I - S) + B [S \Pi_\lambda \tilde{D} - \tilde{D} \Pi_\lambda S] - B K_{\tilde{D}} + \mathfrak{A} \Pi_\lambda \tilde{D} (I - S) = \\ &= \Pi_\lambda \Delta_1 (I - S) + \mathfrak{X}_3 \quad \text{und ebenso} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{A}} \Pi_\lambda \tilde{C} (I + S) &= A \Pi_\lambda \tilde{C} + B S \Pi_\lambda \tilde{C} + A \Pi_\lambda \tilde{C} S + B S \Pi_\lambda \tilde{C} S + \mathfrak{A} \Pi_\lambda \tilde{C} (I + S) = \\ &= \Pi_\lambda (A + B) \tilde{C} (I + S) + B [S \Pi_\lambda \tilde{C} - \tilde{C} \Pi_\lambda S] + B K_{\tilde{C}} + \mathfrak{A} \Pi_\lambda \tilde{C} (I + S) = \\ &= \Pi_\lambda \Delta_2 (I + S) + \mathfrak{X}_4 . \end{aligned} \quad (10)$$

Dabei sind die Operatoren $\mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_4 : L_{p,n}(\Gamma, \rho) \rightarrow W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ vollstetig. Wir rechnen nun mit den anderen beiden (den charakteristischen) Summanden in (9) und in (10) weiter :

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda \Delta_1 (I - S) \frac{1}{\Delta_1 \Pi_\lambda} (I - \mathfrak{S}_1) &= I - \mathfrak{S}_1 + [S \Pi_\lambda \Delta_1 - \Delta_1 \Pi_\lambda S] \frac{1}{\Delta_1 \Pi_\lambda} (I - \mathfrak{S}_1) - S (I - \mathfrak{S}_1) = \\ &= I - \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{X}_5 - S (I - \mathfrak{S}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda \Delta_2 (I+S) \frac{1}{\Delta_2 \Pi_\lambda} (I-\mathfrak{G}_2) &= I - \mathfrak{G}_2 - [S \Pi_\lambda \Delta_2 - \Delta_2 \Pi_\lambda S] \frac{1}{\Delta_2 \Pi_\lambda} (I-\mathfrak{G}_2) + S(I-\mathfrak{G}_2) = \\ &= I - \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{x}_6 + S(I-\mathfrak{G}_2) \end{aligned}$$

Die beiden Operatoren $\mathfrak{x}_5$ und $\mathfrak{x}_6$ sind nach Folgerung 6.6 und Satz 4.3 im Raume $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ vollstetig. Somit erhalten wir aus (9) und (10) sofort :

$$\begin{aligned} 2\bar{\mathfrak{A}}_r &= \Pi_\lambda \Delta_1 (I-S) \frac{1}{\Delta_1 \Pi_\lambda} (I-\mathfrak{G}_1) + \mathfrak{x}_3 \frac{1}{\Delta_1 \Pi_\lambda} (I-\mathfrak{G}_1) + \\ &+ \Pi_\lambda \Delta_2 (I+S) \frac{1}{\Delta_2 \Pi_\lambda} (I-\mathfrak{G}_2) + \mathfrak{x}_4 \frac{1}{\Delta_2 \Pi_\lambda} (I-\mathfrak{G}_2) = \\ &= 2I - \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{x}_5 + \mathfrak{x}_6 + S(\mathfrak{G}_1-\mathfrak{G}_2) + \mathfrak{x}_3 \frac{1}{\Delta_1 \Pi_\lambda} (I-\mathfrak{G}_1) + \\ &+ \mathfrak{x}_4 \frac{1}{\Delta_2 \Pi_\lambda} (I-\mathfrak{G}_2) . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Gleichung (8), wenn man dabei beachtet, dass :

1. der Operator $S(\mathfrak{G}_1-\mathfrak{G}_2)$ wegen

$$\{(\mathfrak{G}_1-\mathfrak{G}_2)_\varphi\}^{(v)}(c_k) = 0 \quad , \quad k=1,2,\dots,2r+s \quad , \quad v=0,1,\dots,m-1 \quad ,$$

stetig ist im Raume $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho^{1-\lambda})$ und dass

2. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ endlichdimensionale (d.h. Operatoren, deren Wertebereich endlichdimensional ist) und damit vollstetige Operatoren sind. Q.e.d.

Satz 7.3.4 : Sei nun $\bar{\mathfrak{A}}$ wie in 7.2.5 vorausgesetzt. Dann besitzt $\bar{\mathfrak{A}}$ einen beschränkten rechten Regularisator $\bar{\mathfrak{R}}$.

Beweis : Wir setzen $\lambda_0 := 1 - \frac{1}{p-1} \max_k \gamma_k$ und es sei $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Ferner führen wir die Grössen $\hat{\gamma}_k := \frac{\gamma_k}{1-\lambda}$, $k=1,2,\dots,2r+s$,

ein, die offensichtlich die Forderungen $\hat{\gamma}_k \in (0, p-1)$ erfüllen.

Damit lässt sich die Gewichtsfunktion $\hat{\rho}$,

$$\hat{\rho}(\tau) := \prod_{k=1}^{2r+s} |\tau - c_k|^{\hat{\gamma}_k} \quad , \quad \tau \in \Gamma \quad , \quad \text{definieren. Schliesslich brauchen}$$

wir noch den Faktor $\hat{\Pi}_\lambda$,

$$\hat{\Pi}_{\lambda}(\tau) := \prod_{k=1}^{2r+s} |\tau - c_k|^{m + \frac{\lambda}{p} \hat{\nu}_k}, \quad \tau \in \Gamma.$$

Der Operator $\tilde{u} : D(\tilde{u}) \rightarrow W_{p,n}^m(\Gamma, \rho) = W_{p,n}^m(\Gamma, \hat{\rho}^{1-\lambda})$ erfüllt wegen $L_{p,n}(\Gamma, \hat{\rho}^{1-\lambda}) = L_{p,n}(\Gamma, \rho)$ die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes 7.3.3 und besitzt damit den beschränkten rechten Regularisator $\hat{\mathfrak{B}}_r$,

$$\hat{\mathfrak{B}}_r := \frac{1}{2} \hat{\Pi}_{\lambda} \left\{ \tilde{D}(I-S) \frac{1}{\Delta_1 \hat{\Pi}_{\lambda}} (I - \mathfrak{S}_1) + \tilde{C}(I+S) \frac{1}{\Delta_2 \hat{\Pi}_{\lambda}} (I - \mathfrak{S}_2) \right\}. \quad \text{Q.e.d.}$$

Aus Satz 7.3.4 und Hilfssatz 7.3.2 folgt unmittelbar die

Folgerung 7.3.5 : Der Operator $\tilde{u}$ ist ein Minus-Semifredholmoperator.

Folgerung 7.4 : Der Operator $\tilde{u}$ ist ein Fredholmoperator.

Folgerung 7.5 : Der Operator $(\mathfrak{B}_1 - \hat{\mathfrak{B}}_r)$ ist vollstetig vom Raume $W_{p,n}^m(\Gamma, \rho)$ in den Raum $L_{p,n}(\Gamma, \rho)$. (Dies folgt sofort aus [35] Satz 1)

7.6 Die Berechnung des Index für $n=1$ (skalare Gleichung) :

Sowohl für Plus-Semifredholmoperatoren als auch für Minus-Semifredholmoperatoren ist der Begriff des Index definiert. Unter dem Index eines Operators A versteht man die Differenz $(\alpha_A - \beta_A)$ von Kerndimension α_A von A minus Kodimension (=Defekt) β_A von A .

$\tilde{u}$ erfülle die Voraussetzungen von Satz 7.4 und es sei $\mathfrak{x}=0$. (Bei der Berechnung des Index spielen bekanntlich vollstetige Störungen keine Rolle, d.h. der Index ist unabhängig von $\mathfrak{x}$). Dann ist die Bestimmungsgleichung (1) für φ dem folgenden Riemannschen Randwertproblem äquivalent :

Gesucht wird eine stückweise holomorphe Funktion Φ , deren Randwerte Φ_+ und Φ_- auf Γ der Bedingung $\Phi_+(t) = G(t)\Phi_-(t) + g(t)$, $t \in \Gamma$, fast überall auf Γ genügen. Dabei wurde

$$G(t) := - \frac{A(t) - B(t)}{A(t) + B(t)} \quad \text{und} \quad g(t) := \frac{f(t)}{A(t) + B(t)} \quad \text{für } t \in \Gamma$$

gesetzt. $G^{(m)}$ besitzt in den Punkten c_k , $k=2r+1, 2r+2, \dots, 2r+s$, Unstetigkeiten 1. Art. In den Punkten $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}$ besitzt G Nullstellen m_{11}^- , m_{12}^- , $\dots$, $m_{1r_1}^-$ -ter Ordnung und in den Punkten

$t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2r_2}$ besitzt G Pole $m_{21}^-, m_{22}^-, \dots, m_{2r_2}^-$ -ter Ordnung. In allen übrigen Punkten auf Γ ist G bis einschliesslich zur Ableitung m -ter Ordnung hölderstetig mit dem Exponenten μ . Die r nicht geschlossenen Kurven Γ_i , $i=1,2,\dots,r$ werden zu geschlossenen $C^{m+1,\mu}$ -Kurven $\hat{\Gamma}_i$ ergänzt und auf den neu hinzugekommenen Ergänzungsbögen werde $G(t) \equiv 1$ und $g(t) \equiv 0$ gesetzt. Die so aus Γ entstandene Gesamtkurve werde mit $\hat{\Gamma}$ bezeichnet. Auf $\hat{\Gamma}$ werde nun die Funktion G_1 ,

$$G_1(t) := \frac{\prod_{k=1}^{r_2} (t-t_{2k})^{m_{2k}}}{r_1 \prod_{k=1}^{r_1} (t-t_{1k})^{m_{1k}}} G(t), \quad t \in \hat{\Gamma},$$

betrachtet. Wir bestimmen zunächst den Index von G_1 bezüglich jeder einzelnen geschlossenen Kurve Γ_i , $i=1,2,\dots,l$ und $\hat{\Gamma}_i$, $i=1,2,\dots,r$ bezüglich derjenigen Klasse von Funktionen aus $L_p(\hat{\Gamma}, \rho)$, die in der Umgebung aller c_k , $k=1,2,\dots,2r+s$, beschränkt sind.

$c'_1, c'_2, \dots, c'_{k_1}$ seien alle Unstetigkeitsstellen von G_1

auf $\hat{\Gamma}_i$ in ihrer natürlichen Reihenfolge (d.h. geordnet im Sinne der positiven Richtung von $\hat{\Gamma}_i$ (bzw. Γ_i , $i=1,2,\dots,l$)). Durch die Forderung, dass die Funktion $\arg(G_1)$ zwischen den beiden Unstetigkeitspunkten (für G_1): $c'_1 + 0$ und $c'_2 - 0$ stetig sein soll, ist mit dem Argument $\arg G_1(c'_1 + 0) =: \eta_1$ gleichzeitig $\arg G_1(c'_2 - 0) =: \eta_1 + \Delta_1$ festgelegt.

Die Grösse $\arg G_1(c'_2 + 0)$ sei durch die Forderung $0 \leq \arg G_1(c'_2 - 0) - \arg G_1(c'_1 + 0) < 2\pi$ festgelegt. Analog dazu ist in den übrigen Punkten $c'_3, c'_4, \dots, c'_{k_1}$ das Argument von $G_1(t)$ festgelegt. Der Index κ'_i von G_1 auf $\hat{\Gamma}_i$ bezüglich derjenigen Klasse von Funktionen aus $L_p(\hat{\Gamma}, \rho)$, die in der Umgebung aller c_k , $k=1,2,\dots,2r+s$, beschränkt sind, ergibt sich nun als die ganze Zahl κ'_i eindeutig aus der Beziehung

$$0 \leq \arg G_1(c'_i - 0) - \arg G_1(c'_i + 0) - 2\pi\kappa'_i < 2\pi$$

Aus der Formel (4.2) von [10] (vergl. a. Formel (45.9) auf Seite 505 von [9] und die Formel (41.25) auf Seite 474 von [9]) ergibt sich dann sofort der Index κ von G auf Γ zu

$$\kappa = (2r + s) + \sum_{i=1}^{r+1} \kappa'_i + \sum_{k=1}^{r_1} m_{1k} \quad .$$

8. Abschnitt (Anhang)

8.1 Die Bestimmung der Kerndimension des Operators $\bar{V}$,

$$V := (t-t_0)^{\frac{1}{2}}(I+S) + \frac{1}{2}(I-S)$$

ohne Zuhilfenahme der Ergebnisse der Theorie des Riemannschen Randwertproblems :

Als Γ wählen wir hier das Segment $[-1,1]$. Ferner sei :

$$V := (t-t_0)^{\frac{1}{2}}(I+S) + \frac{1}{2}(I-S) \quad \text{mit} \quad D(V) := L_2([-1,1], \rho) \quad , \quad \text{wobei}$$

$$\rho(t) := (t+1)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad t \in [-1,1] \quad , \quad \text{natürlich sei auch } t_0 \in [-1,1].$$

$$\text{Wir setzen } \bar{V} := V|D(\bar{V}) \quad \text{mit} \quad D(\bar{V}) := \{f \in L_2([-1,1], \rho) : V f \in W_2^1([-1,1], \rho)\}.$$

$$\text{Es sei nun } f \in D(\bar{V}) \quad \text{mit}$$

$$\bar{V}f = 0 \quad . \quad (1)$$

Wir zeigen, dass daraus $f=0$ folgt. Dazu entwickeln wir :

$$\sqrt{1-t^2} f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(t) \quad (2)$$

nach Tschebyscheffpolynomen 1. Art mit noch unbestimmten komplexwertigen Koeffizienten a_n (für andere Gewichtsfunktionen siehe [77] Theorem 9.1.2) . Nach [78] Seite 145 (oder [79] Seite 188) gilt:

$$[S[(1-\tau^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(\tau)]](t) = -i U_{n-1}(t) \quad , \quad t \in [-1,1] \quad , \quad (3)$$

$$n=0,1,2,\dots \quad \text{und} \quad U_{-1}(t) \equiv 0 \quad . \quad \text{Dabei bezeichnet } U_n \quad ,$$

$$U_n(\cos \varphi) := \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi} \quad , \quad \varphi \in [0,\pi] \quad , \quad \text{das } n\text{-te Tschebyscheffsche}$$

Polynom 2. Art (vergl. a. [80]). Schliesslich bezeichnen wir noch das

Bild von $\frac{2T_n}{\sqrt{1-t^2}}$ nach der Operation $\bar{V}$ mit X_n . Dann gilt also:

$$\begin{aligned} X_n(t) &:= 2(\bar{V} \frac{T_n}{\sqrt{1-t^2}})(t) = \{[(t-t_0)(I+S) + (I-S)] \frac{T_n}{\sqrt{1-t^2}}\}(t) = \\ &= (t-t_0+1) \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} + (t-t_0-1) [S \frac{T_n}{\sqrt{1-t^2}}](t) = \\ &= (t-t_0+1) \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} - (t-t_0-1) i U_{n-1}(t) \quad \text{für } t \in [-1,1] \quad \text{und} \end{aligned}$$

$n=0,1,2,\dots$. Zunächst soll gezeigt werden, dass das System $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$

aus voneinander linear unabhängigen Funktionen besteht. Wir setzen dazu :

$$Y_n(\varphi) := \sin \varphi X_n(\cos \varphi) \quad \text{für} \quad \varphi \in [0, \pi]$$

und erhalten :

$$\begin{aligned} Y_n(\varphi) &= \cos(n+1)\varphi + 2(1-t_0)\cos n\varphi + \cos(n-1)\varphi - \\ &\quad - i\sin(n+1)\varphi + 2i(1+t_0)\sin n\varphi - i\sin(n-1)\varphi = \\ &= e^{-(n+1)i\varphi} + 2e^{ni\varphi} - 2t_0e^{-ni\varphi} + e^{-(n-1)i\varphi} \end{aligned}$$

für $\varphi \in [0, \pi]$ und $n=0, 1, 2, \dots$.

Um nun die Gram'schen Determinanten D_n für die X_m , $m=0, 1, \dots, n$ bilden zu können, berechnen wir auf $[0, \pi]$ die Skalarprodukte

$$d_{n,m} := \int_0^\pi Y_n(\varphi) \overline{Y_m(\varphi)} d\varphi, \quad n, m=0, 1, \dots$$

für den speziellen Wert $t_0' := \frac{\pi}{4}$. (Wenn die Gram'schen Determinanten D_n , $n=0, 1, 2, \dots$, stets $\neq 0$ sind, dann kann bekanntlich das System $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ auf $[-1, 1]$ mit dem Gewicht $\sqrt{1-t^2}$ orthogonalisiert werden.)

$$d_{n,m} = \int_0^\pi X_n(\cos \varphi) \overline{X_m(\cos \varphi)} \sin^2 \varphi d\varphi = \int_{-1}^1 X_n(t) \overline{X_m(t)} \sqrt{1-t^2} dt.$$

Dabei unterscheiden wir 7 Fälle :

1. Für $|n-m| > 2$ und $(n-m) = \text{ungerade Zahl}$, $n, m=0, 1, 2, \dots$ gilt :

$$d_{n,m} = \frac{2i}{n-m}(2-4t_0^2) - \frac{2i}{n-m-2} - \frac{2i}{n-m+2}.$$

2. Für $|n-m| > 2$ und $(n-m) = \text{gerade Zahl}$, $n, m=0, 1, 2, \dots$ gilt :

$$d_{n,m} = \frac{8t_0 i}{n-m-1} + \frac{8it_0}{n-m+1}.$$

3. bis 7. Schliesslich gilt noch :

$$d_{m+2,m} = \frac{32}{5}t_0 i + \pi$$

$$d_{m+1,m} = -4\pi t_0 + \frac{16}{3}i - 8it_0^2$$

$$d_{m,m} = (4t_0^2 - 2)\pi \quad \text{für } m=0,1,2,\dots$$

$$d_{m,m+1} = -4\pi t_0 - \frac{16}{3}i + 8it_0^2$$

$$d_{m,m+2} = \pi - \frac{32}{5}it_0$$

Für den speziellen Wert $t_0' = \frac{\pi}{4}$ erhalten wir :

1. Für $|n-m| > 2$ und $(n-m) = \text{ungerade Zahl}$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$ gilt :

$$d_{n,m} = -\frac{i\pi^2}{2(n-m)} + \frac{4i}{n-m} - \frac{2i}{n-m-2} - \frac{2i}{n-m+2}$$

2. Für $|n-m| > 2$ und $(n-m) = \text{gerade Zahl}$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$ gilt :

$$d_{n,m} = \frac{2\pi i}{n-m-1} + \frac{2\pi i}{n-m+1}$$

3. bis 7. Schliesslich gilt noch :

$$d_{2+m,m} = \pi(1 + \frac{8}{3}i)$$

$$d_{1+m,m} = -\frac{i\pi^2}{2} - \pi^2 + \frac{16}{3}i$$

$$d_{m,m} = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi \quad \text{für } m=0,1,2,\dots$$

$$d_{m,m+1} = -\pi^2 + \frac{i\pi^2}{2} - \frac{16}{3}i$$

$$d_{m,m+2} = \pi - \frac{8}{5}\pi i$$

Also ist die Hauptabschnittsdeterminante D_m , m -ter Ordnung der unendlichen Gram'schen Determinante ein Polynom in π von genau $3m$ -tem Grade mit rational-komplexen Koeffizienten. Wegen der Transzendenz der Zahl π ist somit $D_m \neq 0$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Damit ist gezeigt, dass für den speziellen Wert $t_0' = \frac{\pi}{4}$

die Funktionen X_n , $n=0,1,2,\dots$ auf $[-1,1]$ voneinander linear unabhängig sind. Für andere rationale Vielfache von π gilt dieses Ergebnis offensichtlich ebenfalls.

Wegen der Stetigkeit des Operators S darf S mit dem Summenzei-

chen Σ in der Gleichung (2) vertauscht werden und wir erhalten aus (1) und (2) dann sofort $a_n=0$ für $n=0,1,2,\dots$. Die Kerndimension von $\bar{V}$ für alle t_0 , die sich als rationale Vielfache von π darstellen lassen, ist gleich null. Wegen der Stabilität des Index eines Fredholmoperators bei kleinen Störungen (siehe [73] Satz 5.8) ist daher die Kerndimension von $\bar{V}$ für alle $t_0 \in [-1,1]$ gleich null.

Analog zeigt man, dass der Operator $\bar{W} := W|D(\bar{W})$,

$$W := \frac{1}{2}(I+S) + (t-t_0)\frac{1}{2}(I-S), \quad D(\bar{W}) := \{f \in L_2([-1,1], \rho) : Wf \in W_2^1([-1,1], \rho)\},$$

die Kerndimension null besitzt.

Die Berechnung der Kodimensionen von $\bar{V}$ und $\bar{W}$ ohne Benutzung der Ergebnisse des Riemannschen Randwertproblems erweist sich als äusserst schwierig.

8.2. ERGÄNZENDE BETRACHTUNG DER OPERATOREN $\mathfrak{M}_{k,v}$ und $\mathfrak{R}_{k,a,2}$

VON SEITE 77/78 :

Da die Funktionen $A^{(k-1)}(\sigma(\tau, t))$ und $B^{(1)}(\sigma(\tau, t))$ nicht unmittelbar von τ und t abhängen, sollte der Beweis der Vollstetigkeit dieser Operatoren etwas ausführlicher sein.

8.2.1. Zum Beweis der Vollstetigkeit der Operatoren $\mathfrak{M}_{k,v}$ vom Raume $L(p)$ in den Raum $L_{[p]}$ ist noch zu ergänzen:

Die Funktionen $B^{(1)}(\sigma(\tau, t))$, $l=0,1,\dots,k$, $k=0,1,\dots,m$, hängen für festgehaltenes t stetig von τ ab und sind deshalb auf $[a, \frac{a+2b}{3}]$ beschränkt. Sie sind also stetige Multiplikationsoperatoren von $L_{(p)}$ in sich. Da σ stets zwischen τ und t liegt, kann der Bruch

$$\frac{A_v^{(k-1)}(\sigma) - A_v^{(k-1)}(t)}{\sigma - t}$$

durch $\left| \frac{A_v^{(k-1)}(\sigma) - A_v^{(k-1)}(t)}{\sigma - t} \right| \cdot \left| \frac{\sigma - t}{\tau - t} \right|$ nach oben abgeschätzt werden,

wobei $\left| \frac{\sigma - t}{\tau - t} \right| < 1$ ist. Wegen $A_v \in C^{m,1}[a,b]$ kann der Bruch

durch $\|A_v\|_{C^{m,1}[a,b]}$ weiter abgeschätzt werden. Die weitere

Bearbeitung erfolgt genauso wie im Beweis der Vollstetigkeit

für die Operatoren $\frac{\lambda-1}{\rho^p} \mathfrak{M}_{k\rho} \frac{1}{\rho^p} I$ auf der Seite 71 (und S. 70).

8.2.2. Zum Beweis der Vollstetigkeit der Operatoren $\mathfrak{R}_{k,a,2}: L_{(p)} \rightarrow L_{(p)}$ ist noch zu ergänzen:

Wir definieren die Operatoren $\mathfrak{R}_{[1]}$

$$(\mathfrak{R}_{[1]}\varphi)(t) := \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{B^{(1)}(\sigma) - B^{(1)}(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad \varphi \in L_{(p)}, \quad t \in [a, \frac{a+2b}{3}],$$

$l=0,1,\dots,k, \quad k=0,1,\dots,m$. Dann gilt offensichtlich:

$$(\mathfrak{R}_{k,a,2}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} A^{(k-l)}(t) (\mathfrak{R}_{[1]}\varphi)(t), \quad \varphi \in L_{(p)}, \quad t \in [a, \frac{a+2b}{3}], \quad (4)$$

$k=0,1,\dots,m$. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{R}_{[1]}: L_{(p)} \rightarrow L_{(p)}$ vollstetig ist. Dazu setzen wir noch:

$$(\mathfrak{R}_{[1,v]}\varphi)(t) := \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{B_v^{(1)}(\sigma) - B_v^{(1)}(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad \varphi \in L_{(p)}, \quad t \in [a, \frac{a+2b}{3}],$$

$l=0,1,\dots,k, \quad k=0,1,\dots,m$. Für diese Operatoren beweist man die Vollstetigkeit vom Raume $L_{(p)}$ in den Raum $L_{[p]}$ ebenso wie für die Operatoren $\mathfrak{R}_{k,v}$ im Abschnitt 8.2.1. Erst recht sind dann die Operatoren $\mathfrak{R}_{[1,v]}$ vollstetig vom Raume $L_{(p)}$ in sich, weil die Topologie von $L_{(p)}$ gröber ist als die von $L_{[p]}$. Wir zeigen nun, dass

$$\|\mathfrak{R}_{[1]} - \mathfrak{R}_{[1,v]}\| \rightarrow 0 \text{ gilt für } v \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen ein $n > 0$, das die 9 Bedingungen (18) bis (20d) auf den Seiten 75-76 erfüllt. Die B_v mögen die Bedingungen (21b) und (21c) auf der Seite 76 erfüllen, dann gilt für $v > N_b(\varepsilon)$ und für $t \in [a, b]$:

$$|(\mathfrak{R}_{[1]}\varphi - \mathfrak{R}_{[1,v]}\varphi)(t)|^p \leq \left\{ \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \left| \frac{(B_v^{(1)} - B^{(1)})(\sigma) - (B_v^{(1)} - B^{(1)})(t)}{\tau - t} \right| |\varphi(\tau)| d\tau \right\}^p =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{|(B_v^{(1)} - B^{(1)})\{\sigma\} - (B_v^{(1)} - B^{(1)})\{t\}|}{|\sigma-t|^{\frac{\beta\lambda-1}{q}-\frac{1}{n}}} \cdot \left| \frac{\sigma-t}{\tau-t} \right|^{\frac{\beta\lambda-1}{q}-\frac{1}{n}} \cdot \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau-t|^{\kappa'}} d\tau \right\}^p \leq \\
 &\leq \frac{\varepsilon^p}{C_{13}^p} \left\{ \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau-t|^{\kappa'}} d\tau \right\}^p = \frac{\varepsilon^p}{C_{13}^p} \left\{ \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{|\varphi(\tau)|}{|\tau-t|^{\frac{\kappa'}{p}}} \cdot \frac{(\tau-a)^{-\frac{\alpha}{q}}}{|\tau-t|^{\frac{\alpha}{q}}} d\tau \right\}^p \leq \\
 &\leq \frac{\varepsilon^p}{C_{13}^p} \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{|\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa'}} d\tau \cdot \left\{ \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{(\tau-a)^{-\alpha}}{|\tau-t|^{\kappa'}} d\tau \right\}^{p-1} \leq \quad (6)
 \end{aligned}$$

Wir unterscheiden jetzt die beiden Fälle: 1.) $\frac{\beta\lambda}{q} \leq \alpha$ und 2.) $\frac{\beta\lambda}{q} > \alpha$.
 Falls $\frac{\beta\lambda}{q} \leq \alpha$ ist, dann gilt: $\kappa' + \alpha > 1$ und wir schätzen (6) in diesem Falle weiter ab durch

$$\leq \frac{\varepsilon^p C_{10}^{p-1}}{C_{13}^p} (t-a)^{\left(\frac{\beta\lambda}{q} - \alpha - \frac{1}{n}\right)(p-1)} \cdot \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{|\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa'}} d\tau.$$

Damit ergibt sich in diesem ersten Falle: $\|(\mathfrak{R}_{[1]} - \mathfrak{R}_{[1,v]})\varphi\|_{p,\rho} \leq$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left\{ \int_a^b \rho(t) \frac{\varepsilon^p C_{10}^{p-1}}{C_{13}^p} (t-a)^{\left(\frac{\beta\lambda}{q} - \alpha - \frac{1}{n}\right)(p-1)} \cdot \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{|\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa'}} d\tau dt \right\}^{\frac{1}{p}} = \\
 &= \frac{\varepsilon^p C_{10}^{\frac{1}{p}}}{C_{13}} \left\{ \int_a^{\frac{a+2b}{3}} |\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)} \int_a^b \frac{(t-a)^{\left(\frac{\beta\lambda}{q} - \frac{1}{n}\right)(p-1)} (b-t)^{\beta(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa'}} dt d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon C_{10}^{\frac{1}{q}} C_{11}^{\frac{1}{p}}}{C_{13}} \left(\int_a^{\frac{a+2b}{3}} |\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)} d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \varepsilon \left(\int_a^{\frac{a+2b}{3}} |\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)} (b-\tau)^{\beta(p-1)} d\tau \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \|\varphi\|_{p,\rho} \quad (7)$$

Im zweiten Falle, wenn $\frac{\beta\lambda}{q} > \alpha$ ist, dann gilt wegen (2Cb) noch

$\frac{\beta\lambda}{q} > \alpha + \frac{1}{n}$ und damit $\kappa' + \alpha < 1$. Wir erhalten dann für (6) :

$$\leq \frac{\varepsilon^p C_{14}^{p-1}}{C_{13}^p} \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{|\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa'}} d\tau. \quad \text{Somit ergibt sich in diesem}$$

zweiten Falle: $\|(\mathcal{R}_{[1]} - \mathcal{R}_{[1,v]})\varphi\|_{p,\rho} \leq$

$$\leq \left\{ \int_a^b \rho(t) \frac{\varepsilon^p C_{14}^{p-1}}{C_{13}^p} \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \frac{|\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)}}{|\tau-t|^{\kappa'}} d\tau dt \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{\varepsilon \cdot C_{14}^{\frac{1}{q}}}{C_{13}} \left(\int_a^{\frac{a+2b}{3}} |\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)} \int_a^b \frac{(t-a)^{\alpha(p-1)} (b-t)^{\beta(p-1)}}{|\tau-t|^{1-\frac{\beta\lambda}{q}+\frac{1}{n}}} dt d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon \cdot C_{14}^{\frac{1}{q}} C_{15}^{\frac{1}{p}}}{C_{13}} \left(\int_a^{\frac{a+2b}{3}} |\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)} d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \varepsilon \left(\int_a^{\frac{a+2b}{3}} |\varphi(\tau)|^p (\tau-a)^{\alpha(p-1)} (b-\tau)^{\beta(p-1)} d\tau \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \|\varphi\|_{p,p} . \quad (8)$$

Aus (7) und (8) folgt (5).

Nun bilden die Multiplikationsoperatoren $A^{(k-1)}(t)$, die in der Formel (4) auf Seite 110 stehen, den Raum $L_{(p)}$ stetig in $L_{(p)}$ ab, daher ist wegen (4) alles gezeigt.

8.2.3. Anhang zur Seite 74 vorletzte Zeile :

Wir setzen $K(t, \tau) := \frac{P_\lambda(\tau) - P_\lambda(t)}{\tau - t}$, $t, \tau \in [a, b]$, dann lautet die Formel (4) von Seite 68

$$K_t^{(k)}(t, \tau) = \frac{k}{\pi i} \int_0^1 (1-u)^{k-1} \cdot \frac{P_\lambda^{(k)}(t + [\tau-t]u) - P_\lambda^{(k)}(t)}{\tau - t} du, \quad t, \tau \in [a, b],$$

$k=1, 2, \dots, m$. Auf dieses Integral wird der Mittelwertsatz der Integralrechnung angewendet und wir erhalten

$$K_t^{(k)}(t, \tau) = \frac{k}{\pi i} \cdot \frac{P_\lambda^{(k)}(t + [\tau-t]\xi) - P_\lambda^{(k)}(t)}{\tau - t} \cdot \int_0^1 (1-u)^{k-1} du =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{P_\lambda^{(k)}(\sigma) - P_\lambda^{(k)}(t)}{\tau - t} \quad \text{für ein } \xi \text{ zwischen 0 und 1 und für ein } \sigma$$

zwischen τ und t . Also haben wir die Formel (15) auf Seite 75.

8.4. Ein Hilfssatz für die Abschätzung von gewissen Integralen :

Vorbemerkung: Es sei $\alpha < 1$, $\beta < 1$ und $\alpha + \beta > 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_c^d (\tau - c)^{-\alpha} (d - \tau)^{-\beta} d\tau &= \left(\int_c^{\frac{c+d}{2}} + \int_{\frac{c+d}{2}}^d \right) (\tau - c)^{-\alpha} (d - \tau)^{-\beta} d\tau < \\ &< \int_c^{\frac{c+d}{2}} (\tau - c)^{-\alpha} (d - \frac{c+d}{2})^{-\beta} d\tau + \int_{\frac{c+d}{2}}^d (\frac{c+d}{2} - c)^{-\alpha} (d - \tau)^{-\beta} d\tau = \\ &= \left(\frac{d-c}{2} \right)^{1-\alpha-\beta} \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} \right). \end{aligned}$$

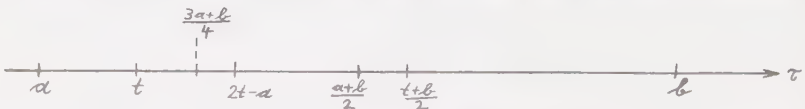
Hilfssatz 8.4. : Es sei $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\kappa < 1$, $\alpha + \kappa > 1$ und $\beta + \kappa > 1$, dann gilt für das Verhalten des Integrals

$$I(t) := \int_a^b (\tau - a)^{-\alpha} (b - \tau)^{-\beta} |\tau - t|^{-\kappa} d\tau$$

in der Nähe des Punktes a : $I(t) = O[(t-a)^{1-\alpha-\kappa}]$ und in der

Nähe des Punktes b : $I(t) = O[(b-t)^{1-\beta-\kappa}]$.

Beweis: Es sei $t \in (a, \frac{3a+b}{4})$. Das Integrationsintervall $[a, b]$ wird durch die 3 Teilpunkte t , $2t-a$ und $\frac{t+b}{2}$ in 4 Teilintervalle zerlegt, wobei der Punkt $2t-a$ erst am Ende des Beweises als Teilpunkt benutzt wird:



Skizze 2 (relative Lage der Punkte: $a < t < \frac{3a+b}{4} < \frac{a+b}{2} < \frac{t+b}{2} < b$ und

$a < t < 2t-a < \frac{a+b}{2} < \frac{t+b}{2} < b$)

$$I(t) = \left(\int_a^t + \int_t^{\frac{t+b}{2}} + \int_{\frac{t+b}{2}}^b \right) (\tau-a)^{-\alpha} (b-\tau)^{-\beta} |\tau-t|^{-\kappa} d\tau$$

Die Integranden aller 3 Integrale werden nun nach oben abgeschätzt und dann wird auf das erste der 3 erhaltenen Integrale die Vorbemerkung angewandt.

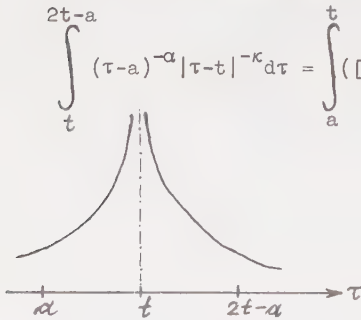
$$\begin{aligned} I(t) &< \int_a^t (\tau-a)^{-\alpha} (b-\frac{3a+b}{4})^{-\beta} |\tau-t|^{-\kappa} d\tau + \int_t^{\frac{t+b}{2}} (\tau-a)^{-\alpha} (b-\frac{3a+b}{4})^{-\beta} |\tau-t|^{-\kappa} d\tau + \\ &+ \int_{\frac{t+b}{2}}^b (\frac{a+b}{2}-a)^{-\alpha} (b-\tau)^{-\beta} |\frac{t+b}{2}-t|^{-\kappa} d\tau < \\ &< [\frac{3}{4}(b-a)]^{-\beta} (\frac{t-a}{2})^{1-\alpha-\kappa} (\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\kappa}) + [\frac{3}{8}(b-a)]^{-\beta} \int_t^{\frac{t+b}{2}} (\tau-a)^{-\alpha} |\tau-t|^{-\kappa} d\tau + \\ &+ (\frac{b-a}{2})^{-\alpha} (\frac{b-t}{2})^{-\kappa} \int_{\frac{t+b}{2}}^b (b-\tau)^{-\beta} d\tau = \\ I(t) &= O\{(t-a)^{1-\alpha-\kappa}\} + \{\frac{3}{8}(b-a)\}^{-\beta} \int_t^{\frac{t+b}{2}} (\tau-a)^{-\alpha} |\tau-t|^{-\kappa} d\tau \quad (*) \end{aligned}$$

Das in (*) verbliebene Integral wird nun abgeschätzt:

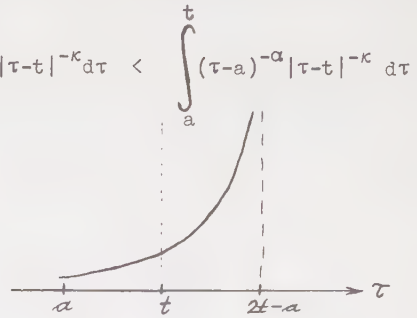
$$\int_t^{\frac{t+b}{2}} (\tau-a)^{-\alpha} |\tau-t|^{-\kappa} d\tau = \left(\int_t^{2t-a} + \int_{2t-a}^{\frac{t+b}{2}} \right) (\tau-a)^{-\alpha} |\tau-t|^{-\kappa} d\tau <$$

$$\begin{aligned}
 & < \int_a^t (\tau-a)^{-\alpha} |\tau-t|^{-\kappa} d\tau + \int_{2t-a}^{\frac{t+b}{2}} (\tau-t)^{-\alpha} |\tau-t|^{-\kappa} d\tau = \\
 & = \left(\frac{t-a}{2}\right)^{1-\alpha-\kappa} \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\kappa}\right) + \frac{1}{1-\alpha-\kappa} \left[\left(\frac{t+b}{2}-t\right)^{1-\alpha-\kappa} - (2t-a-t)^{1-\alpha-\kappa}\right] = \\
 & = 0 \{(t-a)^{1-\alpha-\kappa}\} . \quad (**)
 \end{aligned}$$

In der Abschätzung des Integrals (über τ) von t bis $2t-a$ wurde erstens die Symmetrie (siehe Skizze 3) der Funktion $|\tau-t|^{-\kappa}$ von τ bezüglich ihrer Asymptoten $\tau=t$ und zweitens die Monotonie der auf dem Intervall $(a, 2t-a)$ steigenden Funktion $([2t-a]-\tau)^{-\alpha}$ von τ (siehe Skizze 4) ausgenutzt, denn durch die Transformation der Integrationsvariablen $\tau \rightarrow \tau' = 2t-\tau$ (Spiegelung an der oben genannten Symmetrieachse des Graphs von $|\tau-t|^{-\kappa}$) erhalten wir sofort :



Skizze 3
(qualitativer Verlauf der Funktion $|\tau-t|^{-\kappa}$)



Skizze 4
(qualitativer Verlauf der Funktion $([2t-a]-\tau)^{-\alpha}$)

Aus (*) und (**) folgt die Behauptung $I(t) = 0 \{(t-a)^{1-\alpha-\kappa}\}$.

Das Verhalten von $I(t)$ für $t \rightarrow b$ erhält man durch die Vertauschung :

$a \rightarrow b$
 $b \rightarrow a$
 $\alpha \rightarrow \beta$
 $\beta \rightarrow \alpha$

q.e.d.

- [1] Prössdorf, S.: "Eindimensionale singuläre Integralgleichungen und Faltungsgleichungen nicht normalen Typs in lokalkonvexen Räumen." Habilitationsschrift, K.-M.-Stadt (Chemnitz) 1967.
- [2] Prössdorf, S.: "Die Indexformel für ein System eindimensionaler singulärer Integralgleichungen nicht normalen Typs." Mathem. Zeitschr. 106 (1968), 73-80.
- [3] Prössdorf, S.: "Operatoren, die eine unbeschränkte Regularisierung gestatten." (russ.) Vestnik Leningr. Univ. 12 (1965), 59-67.
- [4] Prössdorf, S.: "Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen nicht normalen Typs." Math. Ann. 182 (1969), 130-150.
- [5] Prössdorf, S.: "Zur Theorie der Systeme singulärer Integralgleichungen mit ausgearteter symbolischer Matrix I." (russ.) Vestnik Leningr. Univ. 20 (1965), Nr. 19, 58-73.
- [6] Prössdorf, S.: "Zur Theorie der Systeme singulärer Integralgleichungen mit ausgearteter symbolischer Matrix II." (russ.) Vestnik Leningr. Univ. 21 (1966), Nr. 7, 68-75.
- [7] Chvedelidse, B.V.: "Lineare unstetige Randwertaufgaben der Funktionentheorie, singuläre Integralgleichungen und einige ihrer Anwendungen." (russ.) Trudy Tbil. mat. inst. 23, (1956), 3-158.
- [8] Muschelischvili, N.I.: "Singuläre Integralgleichungen" (russ.) Moskau, 1968.
- [9] Gachov, F.D.: "Randwertaufgaben", Moskau 1968 (russ.).
- [10] Tschikin, L.A.: "Besondere Fälle der Riemannschen Randwertaufgabe und singuläre Integralgleichungen" (russ.) Utschen. sapisk. Kazansk. Univ. 113 (1952), 57-105.
- [11] Kosulin, A.E.: "Nicht normale Fälle in der Theorie der singulären Integralgleichungen" (russ.) Vestnik Leningr. Univ. 19 (1962), 142-148.
- [12] Kantorovitsch, L.V. und G.P. Akilov: "Funktionalanalysis in normierten Räumen", Akademie-Verlag, Berlin 1964.
- [13] Smirnov, W.S.: "Lehrgang der Höheren Mathematik", Bd. 5, Berlin 1962.
- [14] Natanson, I.P.: "Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen", Akademie-Verlag, Berlin 1961.
- [15] Ljusternik, L.A. und W.I. Sobolev: "Elemente der Funktionalanalysis", Akademie-Verlag, Berlin 1967.
- [16] Kosulin, A.E.: "Eindimensionale singuläre Integralgleichungen in Distributionenräumen auf nicht geschlossenen Konturen", Vestnik Leningr. Univ. 7 (1966), 157-160, (russ.).
- [17] Kosulin, A.E.: "Eindimensionale singuläre Integralgleichungen in Distributionenräumen", Doklady AN SSSR 163 (1965), 1054-1057 (russ.).
- [18] Samko, S.G.: "Die allgemeine singuläre Gleichung im ausgeschlos-

senen Fall" . Differential'nye uravnenija 1 (1965) , 1108-1116 . (russ.) .

- [19] Gachov, F.D.: "Analytische Fortsetzung als Lösungsmethode von Funktionalgleichungen" . Internationale Konferenz über analytische Funktionen (Jerewan 1965) . Moskau 1966 , Seite 73 .
- [20] Michlin, S.G.: "Zwei Sätze über Regularisatoren" . Doklady AN SSSR 125 (1959) , 757-759 (russ.) .
- [21] Krasnosel'skij, M.A. und andere: "Integraloperatoren in Räumen summierbarer Funktionen" , Moskau 1966 (russ.) .
- [22] Hille, E. und I.P. Tamarkin: "On the theory of linear integral equations II" , Ann. of Math. 25 (1954) .
- [23] Neether, F.: "Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen" . Math. Ann. 82 (1921) , 42-63 .
- [24] Carleman, T.: "Sur la resolution des certaines equations integrales" , Arkiv för matem. astr. och fys. 16 (1922) , N26
- [25] Scherman, D.I.: "Über einen Fall der Regularisierung singulärer Integralgleichungen" . Priklad. matem. i mehan. 12 (1951) 75-83 , (russ.) .
- [26] Krein, S.G. und Petunin, Ju.I.: "Skalen von Banachräumen" Uspechi matem. nauk SSSR 21 (1966) , vyp.2(128) , 89-168 , (russ.) .
- [27] Tricomi, F.G.: "Sull'inversione dell'ordine di integrali principali" nel senso di Cauchy" , Rend.Lincei (8) , 18 , 1955 , Seite 5-7 .
- [28] Hewitt, E. und Stromberg, K.: "Real and abstract analysis" . Berlin-Heidelberg-New York 1958 .
- [29] Ostrowski, A.: "Vorlesungen über Differential und Integralrechnung" , Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1967 .
- [30] Fichtenholz, G.M.: "Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung" , Deutscher Verlag d. Wiss. Berlin 1964 .
- [31] Prossdorf, S.: "Zur Lösung von singulären Integralgleichungen mit entartetem Symbol" . Elliptische Differentialgleichungen, Band I , (Kolloqu., Berlin 1969) , Akademie-Verlag Berlin , 1970 , Seite 111-118 .
- [32] Przeworska-Rolewicz, D. and Rolewicz, St.: Equations in linear spaces , Warschau 1968 .
- [33] Gochberg, I.C. und Krein, M.G.: "Osnovnye položeniya o defektnych tschislach, kornevych tschislach linejnych operatorov" . *) Uspechi matem. nauk SSSR 12 , vyp.2 (1957) , 43-118 .
- [34] Schmeier, H.: "Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen" , Math. Zeitschrift 66 (1956) , 147-165 .

*) Grundlegende Sätze über die Defektzahlen, Nullzahlen und Indizes linearer Operatoren (Übers. des Titels aus d. Russ.)

- [35] Rakovschtschik, L.S.: "Einige Sätze über Regularisatoren linearer Operatoren in Banachräumen", Doklady AN SSSR 140, Nr. 5, 1023-1025, (1961), (russ.).
- [36] Gochberg, I.C.: "Über eine Anwendung der Theorie der normierten Ringe auf singuläre Integralgleichungen", Uspechi matem. nauk, 7, Heft 2, 149-156 (1952); (russ.).
- [37] Gordadse, E.G.: "Über ein Theorem von S.G. Michlin", Trudy Tbilissk. matem. instituta, 36, (1969), 107-110, (russ.).
- [38] Prössdorf, S.: "Ein Satz über die äquivalente Regularisierung abgeschlossener Operatoren", Wissensch. Zeitschr. d. TH KMSt, Jahrgang 10, Heft 5 (1968), 555-556.
- [39] Gochberg, I.C. und N. Ja. Krupnik: "Über die Algebra, die von den eindimensionalen singulären Integraloperatoren mit stückweise stetigen Koeffizienten erzeugt wird", Funkcional'nyj analiz i jego prilozhenija, 4, vyp. 3, 1970, 26-36, (russ.).
- [40] Meister, E.: "Das Riemannsche Randwertproblem", Überblicke der Mathematik, Band 6, BI-Verlag.
- [41] Poincare, A.: "Leçon de Mecanique Celeste", tom 3, Paris 1910, Chapitre 10, Seite 252.
- [42] Hilbert, D.: "Über eine Anwendung der Integralgleichungen", Verhandl. des 3. Internat. Mathem. kongr., Heidelberg 1904.
- [43] Hilbert, D.: "Grundzüge der Integralgleichungen", Leipzig-Berlin 2. Auflage 1924, 3. Abschnitt.
- [44] Riemann, B.: "Gesammelte Werke", Leipzig, 1876, 357-369.
- [45] Plemelj, I.: "Riemannsche Funktionenscharen", Monatshefte Math. und Physik 19, (1908), 211-245.
- [46] Betz, A.: "Tragflügeltheorie", Berichte und Abhandlungen der wissensch. Gesellsch. f. Luftf. 1920, Heft 2.
- [47] Riesz, M.: "Sur les fonctions conjuguées", Math. Zeitschr. 27 (1927).
- [48] Michlin, S.G.: "Äquivalenzprobleme in der Theorie der singulären Integralgleichungen", Matem. sbornik 2 (45), 1938, 121-141 (russ.).
- [49] Muschelischvili, N.I.: "Die Anwendung des Integrals vom Cauchy'schen Typ auf eine Klasse singuläre Integralgleichungen", Trudy Tbilissk. matem. inst. AN Gruz. SSR 10, 1941, 1-43, russ.
- [50] Gachov, F.D.: "Randwertaufgaben der Theorie analytischer Funktionen und singuläre Integralgleichungen", Habilitationsschr. Tiflis 1941, (russ.).
- [51] Gachov, F.D.: "Randwertaufgaben für analytische Funktionen und singuläre Integralgleichungen", Izv. Kazansk. fiz.-matem. o.-va 14, serija 3, 1949, 75-100, (russ.).

- [52] Scherman, D.I.: "Zur allgemeinen Aufgabe der Potentialtheorie" Izv. AN SSSR, ser.matem., 10, 1946, 121-134, (russ.) .
- [53] Scherman, D.I.: "Über eine Lösungsmethode für eine gewisse singuläre Integralgleichung", Prikladn. matem. i mechan., 12, 1948, 423-453, (russ.) .
- [54] Scherman, D.I.: "Über gewisse Aufgaben der Potentialtheorie", Prikl. matem. i mechan., 9, 1945, 479-488, (russ.) .
- [55] Scherman, D.I.: "Über den Zusammenhang der Grundaufgabe der Elastizitätstheorie mit einem besonderen Fall der Poincaréschen Aufgabe", Prikl. matem. i mechan., 11, 1953, 685-692, (russ.) .
- [56] Mel'nik, I.M.: "Ausgeschlossene Fälle der Riemannschen Randwertaufgabe", Trudy Tbil.mat.inst. AN Gruz. SSR 24, 1957, 149-162, (russ.) .
- e [57] Mel'nik, I.M.: "Das Verhalten der Integrale vom Cauchyschen Typ in der Nähe von Unstetigkeitspunkten der Dichte und besondere Fälle der Riemannschen Randwertaufgabe", Utshebn. zapisk. Rostovsk. univers. 42, vyp. 6, 1955, 57-71, (russ.) .
- [58] Vekua, N.P.: "Über ein Hilbertsches Problem mit unstetigen Koeffizienten und seine Anwendung auf singuläre Integralgleichungen" Trudy Tbiliss. matem. inst. AN Gruzinsk. SSR 18 (1951), 307-313, (russ.) .
- [59] Kosulin, A.E.: "Eindimensionale singuläre Integralgleichungen in verallgemeinerten Funktionen", Matem. sbornik 70 (112) (1966) Nr. 2, 180-197, (russ.) .
- [60] Prössdorf, S.: "Über lineare Gleichungen in Räumen von Grundfunktionen und von verallgemeinerten Funktionen", Doklady AN SSSR 166 (1966), Nr. 4, 802-805, (russ.) .
- [61] Prössdorf, S.: "Der Index eines eindimensionalen singulären Operators mit ausgeartetem Symbol im Raum $C^\infty(\Gamma)$ ", vestnik Leningradsk. Univers. (1966), Nr. 7, 154-156, (russ.) .
- [62] Prössdorf, S.: "Über die Stabilität des Index eines eindimensionalen singulären Operators mit ausgeartetem Symbol", Probleme der mathematischen Analysis, Randwertprobleme und Integralgleichungen. Leningrad: Universitätsverlag 1966, 70-79, (russ.) .
- [63] Prössdorf, S.: "Über eine Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffes und die Regularisierung singulärer Integralgleichungen" Wissenschaftliche Zeitschrift der TH KMSt., Jahrgang 10, 1968, Heft 2, 51-554 .
- [64] Prössdorf, S. und Eckehard Teichmann: "Über die äquivalente rechte Regularisierung einer singulären Integralgleichung nicht normalen Typs", Wiss. Zeitschr. d. TH KMSt. 11, 1969, Heft 3, 361-365 .

- [65] Prössdorf, S.: "Zur Theorie singulärer Integralgleichungen nicht normalen Typs", Wiss. Zeitschr. d. TH KMSt. 11, 1969, Heft 3, 353-357.
- [66] Prössdorf, S.: "Zur Theorie der Faltungsgleichungen nicht normalen Typs", Math. Nachrichten 42 (1969), 103-131.
- [67] Prössdorf, S.: "Über koerzitive und nicht-koerzitive Probleme bei singulären Integralgleichungen", Mitteilungen d. Mathem. GdDDR, Jahrgang 1970, Heft 3/4, Seite 61-78.
- [68] Prössdorf, S.: "Über eine Klasse von Pseudodifferentialoperatoren im Halbraum", Math. Nachrichten 52 (1972), 113-139.
- [69] Prössdorf, S.: "Singuläre Integralgleichungen mit einem Symbol, das in einer endlichen Anzahl von Punkten verschwindet", Matem. Issledov. 7, Nr.1(23), 116-132 (1972), (russ.).
- [70] Silbermann, B.: "Über eine Klasse von singulären Integralgleichungen, deren Symbol nicht mehr als eine endliche Anzahl von Nullstellen ganzzahliger und gebrochener Ordnung aufweist", Mathemat. Nachrichten 47, (1970), 245-260.
- [71] Silbermann, B.: "Über eine Klasse einseitig invertierbarer singulärer Integraloperatoren nicht normalen Typs in gewissen Paaren von Banachräumen I", Mathem. Nachrichten 51, (1971), 327-342.
- [72] Silbermann, B.: "Über eine Klasse einseitig invertierbarer singulärer Integraloperatoren nicht normalen Typs in gewissen Paaren von Banachräumen II", Mathem. Nachrichten 52, (1972), 297-313.
- [73] Jörgens, K.: "Lineare Integraloperatoren", Teubner-Verlag Stuttgart, 1970.
- [74] Goldberg, S.: "Unbounded linear Operators", Mc Graw-Hill Book Company, New York etc. 1966.
- [75] Gachov, F.D.: "Randwertaufgaben für Systeme von n Paaren von Funktionen", Uspechi matem. nauk SSSR 7, vyp.4(50), 1952, 3-54, (russ.).
- [76] Chvedelidse, B.V.: "Über die Aufgabe der Regularisierung in der Theorie der Integralgleichungen mit Cauchyschem Kern", Doklady AN SSSR 140, (1961): 1, 66-68, (russ.).
- [77] Szegő, G.: "Orthogonal Polynomials", American Mathematical Society, Providence, 1967.
- [78] Hamel, G.: "Integralgleichungen". Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1949.
- [79] Tricomi, F.: "Vorlesungen über Orthogonalreihen". Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

- [80] Pychtejew, G.N.: "Über eine exakte Berechnung von gewissen Integralen mit Kernen vom Cauchyschen Typ". (russ.), Doklady akademii nauk SSSR 140(1961), vyp.3, 536-539.
- [81] Gramsch, B.: "Vorlesungen über Fredholmoperatoren", Mainz 1968 .
- [82] Šerman, D.I.: "Über einen Fall in der Theorie der singulären Gleichung". (russ.), Doklady akad.nauk SSSR 12:4 (1948) .
- [83] Chajkin, M.I.: "Über die Regularisierung von Operatoren mit einem Wertebereich, der nicht abgeschlossen ist". (russ.), Izvestija VUZOV matematika 1970, Nr.8(99), 118-123 .
- [84] Yood, B.: "Properties of linear Transformations preserved under addition of a completely continuous Transformation". Duke Math. J. 18:1(1951), 599-612 .
- [85] Gachov, F.D.: "Über den gegenwärtigen Stand der Theorie der Randwertaufgaben für analytische Funktionen und der Theorie der singulären Integralgleichungen". (russ.), Trudy seminara po krajevym zadačam, 1970, vypusk 7, Seite 3-17 .
- [86] Maljutov, M.B.: "Brownsche Bewegung mit Reflexion und das Problem der Richtungsableitung". (russ.), Doklady akademii nauk SSSR 156:6, 1285-1287 .
- [87] Muschelischvili, N.I.: "Singular integral equations, boundary problems in the theory of functions, and certain of their applications to mathematical physics". Moskau , 1946 .
- [88] Zhgenti, V.S.: "The solution of the first basic boundary value problem for equations of a vibrating plate in an infinite domain". (russ.), Trudy Tbilissk. Matem. Institut 14 (1946) .
- [89] Maz'ja, V.G. und B.P.Panejach: "Ausgeartete elliptische Pseudodifferentialoperatoren auf glatten Mannigfaltigkeiten ohne Rand". (russ.), Funkcional'nye analiz i ego prilozhenija 3:2(1969), 91-92.
- [90] Gochberg, I.C. und Krupnik, N.Ja.: "Singuläre Integralgleichungen mit stetigen Koeffizienten auf einer zusammengesetzten Kontur". Matem. issledovanija 5 , Nr.2(16), 89-103, (1970), (russ.) .
- [91] Gochberg, I.C. und N.Ja.Krupnik: "Algebra generated by one-dimensional singular integral operators with piecewise continuous coeff.". Funkcional'nye analiz i ego prilozhenija 4 , Nr.3, 26-36(1970) russ. engl. Übers.: Functional Analysis Appl. 4 (1970), 193-201(1971) .
- [92] Semencul, A.A.: "Über singuläre Integralgleichungen mit Koeffizienten, die vom fastperiodischen Typ unstetig sind". (russ.) Matem. issledovanija 6 : 3(21), (1971), 92-114 .
- [93] Hardy, G.H., J.E.Littlewood and G.Polya: "Inequalities". London-Cambridge: University Press 1951 .
- [94] Hery, G.: "Über eine Klasse von Integralgleichungen mit Cauchyschem Hauptwert", Inaugur.Diss.Univ.Saarbrücken: 1965, 91 Seiten.
- [95] Kremer, M.: "Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen in einem Raum verallgemeinerter Funktionen", Dipl.-Arbeit, Univ. Saarbrücken: 1966, 64 Seiten.

ZUSAMMENFASSUNG

Wie I.C.Gochberg (in [36]) zeigte, besitzt ein Operator von der Form

$$\mathfrak{A} := aI + bS + \mathfrak{T}$$

im Raume $L_p(\Gamma)$, $p > 1$, Γ geschlossene und hinreichend glatte Kurve in der komplexen Ebene, genau dann einen beschränkten linken Regularisator, wenn $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, ist. (I =identischer Operator in $L_p(\Gamma)$, S =singulärer Integraloperator mit Cauchyschem Kern, $\mathfrak{T}$ =ein in $L_p(\Gamma)$ vollstetiger Operator, a, b =stetige, komplexwertige Funktionen auf Γ).

Im Gegensatz dazu bewies S.Prössdorf (siehe z.B.[4]), dass die Einschränkung $\bar{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ auf einen gewissen Teilraum von $L_p(\Gamma)$ auch dann einen beschränkten linken Regularisator besitzt, wenn $a^2 - b^2$ auf Γ endlich viele Nullstellen ganzzahliger Ordnungen besitzt, wobei a und b in einer Umgebung dieser Nullstellen als hinreichend glatt vorausgesetzt werden. In diesem Zusammenhang stellte S.Prössdorf die Frage: Existiert zu einer Einschränkung $\bar{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ auf einen gewissen Teilraum von $D(\mathfrak{A})$ ein beschränkter linker Regularisator, auch wenn Γ nicht geschlossen ist? Wenn ja, kann man ihn eventuell explizit angeben? Ist auch eine Aussage über die rechte Regularisierung in dem Falle nicht geschlossener Kurven möglich? Alle drei Fragen werden mit der vorliegenden Arbeit positiv beantwortet. Gleichzeitig ist damit bewiesen, dass $\bar{\mathfrak{A}}$ ein Fredholmoperator ist, d.h. ein normalauflösbarer Operator mit endlichem Defektpaar $(\alpha_{\bar{\mathfrak{A}}}, \beta_{\bar{\mathfrak{A}}})$ und damit endlichem Index

$$\text{v}_{\bar{\mathfrak{A}}} := \alpha_{\bar{\mathfrak{A}}} - \beta_{\bar{\mathfrak{A}}}$$

ist. Die Regularisatoren werden gleich für Systeme von singulären Integralgleichungen konstruiert, deren symbolische Determinanten endlich viele Nullstellen ganzzahliger Ordnungen auf Γ besitzen. Die Nullstellen dürfen aber nicht mit Endpunkten der nicht geschlossenen Kurven zusammenfallen. Ausserdem wird der Fall, dass die Koeffizienten der Gleichung endlich viele Unstetigkeiten 1.Art besitzen mit erfasst. Der Index des Operators $\bar{\mathfrak{A}}$ wird nur im Falle $n=1$ (skalare Gleichung) berechnet, indem der Zusammenhang mit dem zugehörigen Riemannschen Randwertproblem benutzt wird.

LEBENS LAUF

Am 4. Juni 1940 wurde ich als viertes von sechs Kindern in Einsiedel bei Chemnitz geboren. Ich besuchte acht Jahre lang die Grundschule in Einsiedel und legte im Sommer 1954 die Abschlussprüfung ab. Vom 5.10.1954 bis zum 31.8.1956 erlernte ich im VEB Fahrzeugelektrik KMSt. (Chemnitz) Werk II den Galvaniseur-Beruf, wobei ich zwei Jahre die Gewerbliche Berufsschule KMSt. besuchte. Am 31.8.1956 bestand ich die Facharbeiterprüfung und arbeitete anschliessend in dem Betrieb weiter. Von 1957 bis 1960 besuchte ich die ABF KMSt. und legte im Frühsommer 1960 das Abitur dort ab. Im Winter 1960 gelang es mir, das gewünschte Mathematikstudium an der damaligen TH Dresden endlich zu beginnen. Seit dem zweiten Semester arbeitete ich auch als Hilfsassistent (bei Prof. Heinrich). Diese Tätigkeit weckte in mir die Begeisterung für den Lehrerberuf. Nach dem 4. Studienjahr führte ich zusammen mit Kommilitonen ein mathematisches Praktikum an der Universität Brunn durch. Im Jahre 1965 diplomierte ich bei Herrn Prof. Dr. Landsberg an der TU Dresden mit der Note "GUT". Das Diplomthema lautete: "Der Erweiterungssatz von Tietze und seine Verallgemeinerungen". Von Herbst 1965 bis zum Winter 1969/1970 arbeitete ich als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Mathematik der TH KMSt. (Chemnitz). Im Jahre 1969 stellte mir Herr Prof. Dr. S. Prössdorf freundlicherweise das Thema (in etwas engerem Sinne) zur Dissertation. Anfang Juli 1972 immatrikulierte ich mich an der Münchner Universität.

München, am 2.11.1973

Baldur Schüppel
(Baldur Schüppel)

